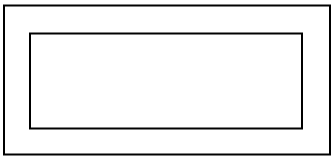
Математическая регата 9 классов 25.11.2000

Первый тур (10 минут; каждая задача - 6 баллов).

1.1. Решая задачу: "*Какое значение принимает выражение* $x^{2000} + x^{1999} + x^{1998} + 1000x^{1000} + ... + 1000x^{999} + 1000x^{998} + 2000x^3 + 2000x^2 + 2000x + 3000$ *(x - действительное число), если* $x^2 + x + 1 = 0$*?* ", Вася получил ответ 3000. Прав ли Вася? Ответ обосновать.

1.2. Являются ли подобными два прямоугольника: картина в рамке и картина без рамки, если ширина рамки всюду одинакова (см. рис.)?



1.3. Дано число: 123456789101112... . Какая цифра стоит на 2000-м месте?

Второй тур (15 минут; каждая задача - 7 баллов).

2.1. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + b + c > 0$. Найдите знак коэффициента c.

2.2. Биссектриса треугольника делит одну из его сторон на отрезки 3 см и 5 см. В каких границах изменяется периметр треугольника?

2.3. Назовем натуральное число "замечательным", если оно - самое маленькое среди всех натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Сколько существует трехзначных замечательных чисел?

Третий тур (15 минут; каждая задача - 7 баллов).

3.1. На координатной плоскости изобразите все точки, координаты которых являются решениями уравнения: $y^2 - |y| = x^2 - |x|$.

3.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E, F и G - середины сторон AB, BC и AD соответственно, причем, $GE \perp AB$, $GF \perp BC$. Найдите угол ACD.

3.3. Тридцать студентов с пяти курсов придумали 40 задач для олимпиады, причем однокурсники - одинаковое количество задач, а студенты с разных курсов - разное. Сколько студентов придумали по одной задаче?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача - 8 баллов).

4.1. Докажите, что если каждое из двух чисел является суммой квадратов двух целых чисел, то и их произведение является суммой квадратов двух целых чисел.

4.2. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Верно ли, что центр окружности, описанной около трапеции, лежит на окружности, описанной около треугольника ABP?

4.3. Корни уравнения $x^2 + ax + 1 = b$ - целые, отличные от нуля, числа. Докажите, что число

$a^2 + b^2$ является составным.

Пятый тур (25 минут; каждая задача - 9 баллов).

5.1. Про квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$ известно, что $|f(x)| \leq 1$ при $0 \leq x \leq 1$. Найдите наибольшее возможное значение a.

5.2. Дан тупоугольный треугольник ABC. На стороне AC, лежащей против тупого угла, укажите такие точки D, что отрезок BD является средним геометрическим отрезков AD и CD.

5.3. Докажите, что среди чисел вида 19991999...199900...0 найдется хотя бы одно, которое делится на 2001.

Задания

Первый тур (10 минут; каждая задача - 6 баллов)

1.1. Известно, что число a является корнем уравнения $x^3+7x-9=0$. Найдите значение выражения $(2a^3+3a)(11a-18)$.

1.2. Могут ли длины сторон a, b и c прямоугольного треугольника удовлетворять соотношению $a^2+b^2=5c^2$?

1.3. Сколько десятизначных чисел можно составить так, чтобы любые две соседние цифры отличались на единицу, если в их десятичной записи можно использовать только цифры 1, 2 и 3 ?

Второй тур (15 минут; каждая задача - 7 баллов)

2.1. При каких натуральных значениях n выражение $n^2+(n-1)^2+n^2(n-1)^2$ является полным квадратом?

2.2. Один из углов трапеции равен 60^o. Найдите отношение её оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.

2.3. Сравните числа A и B, не используя калькулятор: A = 1*2*3*...*19*20 и B = 1+2+3+...+999999+1000000.

Третий тур (15 минут; каждая задача - 7 баллов)

3.1. Решите уравнение $15(x+1)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|$.

3.2. В треугольнике ABC: угол $A >$ угол $B >$ угол C. К какой из сторон треугольника ближе всего расположен центр окружности, описанной около этого треугольника?

3.3. За одну операцию разрешается разрезать многоугольник на две части по любому отрезку, перевернуть одну из частей и склеить эти части по тому же отрезку. Можно ли за несколько таких операций из прямоугольника 5*20 получить квадрат 10*10 ?

Четвертый тур (20 минут; каждая задача - 8 баллов)

4.1. Решите систему уравнений:

$x+y+z = 3,$

$\{\ x^2+y^2+z^2=3.$

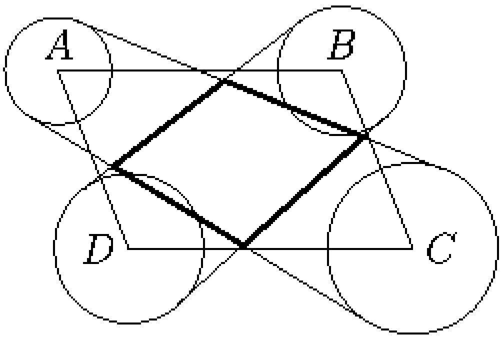
4.2. A и B - фиксированные точки на плоскости. Найдите геометрическое место точек M этой плоскости, для которых угол ABM - наибольший из углов треугольника ABM.

4.3. На столе поставлены в один ряд N стаканов, перевёрнутые вверх дном. Разрешается одновременно переворачивать два стакана, стоящие через один. При каких значениях N можно добиться того, чтобы все стаканы стояли дном вниз?

Пятый тур (25 минут; каждая задача - 9 баллов)

5.1. При каких значения параметра a разность корней квадратного
x^2-$6x$+12+a^2-$4a$=0
принимает наибольшее значение?

5.2. Вершины параллелограмма $ABCD$ являются центрами непересекающихся окружностей, радиусы которых равны соответственно 5, 6, 8 и 7 (см. рис.). К окружностям с центрами в противолежащимих вершинах проведены общие внешние касательные, которые образуют новый четырёхугольник.



Докажите, что в него можно вписать окружность и найдите её радиус.

5.3. Найдите среднее арифметическое всех пятизначных чисел-палиндромов (чисел, которые справа налево и слева направо читаются одинаково, например, 12421).

Математическая регата 9 классов 19.11.2002

1.1. К простому числу прибавили 400 и получили квадрат натурального числа. Каким могло быть исходное простое число?

Ответ: 41.

Пусть p – искомое простое число, тогда $p + 400 = n^2$, где n – натуральное. Следовательно, $p = n^2 - 400 \Leftrightarrow p = (n - 20)(n + 20)$. Так как $n + 20$ – натуральное число, отличное от 1, а число p – простое, то $n - 20 = 1$. Значит, $n = 21$, тогда $p = 41$.

1.2. CA и CB – касательные к окружности в точках A и B соответственно, AD – ее диаметр. Прямые DB и AC пересекаются в точке E. Докажите, что C – середина отрезка AE.

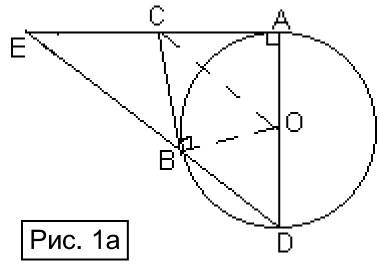


Рис. 1а

Первый способ. Соединим центр O данной окружности с точками B и C (см. рис. 1а). Из равенства прямоугольных треугольников OAC и OBC следует, что OC – биссектриса внешнего угла AOB треугольника BOD. Так как ΔBOD – равнобедренный ($OB = OD$), то $OC \| BD$, тогда, по теореме Фалеса, C – середина отрезка AE, что и требовалось доказать.

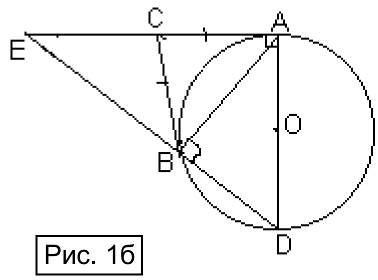


Рис. 1б

Второй способ. Соединим точки A и B, тогда $\angle ABD = 90°$, так как этот угол – вписанный и опирается на диаметр окружности (см. рис. 1б). Так как $CA = CB$, то в прямоугольном треугольнике ABE точка C, лежащая на гипотенузе AE, равноудалена от вершин A и B. Значит, эта точка лежит на серединном перпендикуляре к катету AB, то есть, является серединой гипотенузы, что и требовалось доказать.

1.3. Можно ли число 2002 представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, произведение которых делится на 2002?

Ответ: нет, нельзя.

Пусть $2002 = m + n$, где m и n – натуральные числа, причем mn делится на 2002. Разложим 2002 на простые множители: $2002 = 2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$. Так как mn делится на 2002 и 2 – простое число, то хотя бы одно из чисел m или n делится на 2, а так как их сумма также кратна 2, то каждое из этих чисел делится на 2.

Аналогичными рассуждениями получим, что каждое из чисел m и n делится также на 7, на 11 и на 13. Таким образом, каждое из них делится на 2002, но тогда их сумма больше чем 2002. Полученное противоречие показывает, что искомое представление невозможно.

2.1. Докажите, что при всех $x > 0$, $y > 0$ выполняется неравенство $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \le \frac{1}{xy}$.

Если $x > 0$, $y > 0$, то $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \le \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} + \frac{2y^2 x}{y^4 + x^2} \le 2 \Leftrightarrow$ $\left(1 - \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}\right) + \left(1 - \frac{2y^2 x}{y^4 + x^2}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - y)^2}{x^4 + y^2} + \frac{(y^2 - x)^2}{y^4 + x^2} \ge 0$. Последнее неравенство выполняется при всех положительных значениях x и y, поэтому, выполняется и данное неравенство.

Можно также составить частное левой и правой части доказываемого неравенства и аналогичными преобразованиями доказать, что значение частного не превосходит 1. Этого достаточно для доказательства данного неравенства, так как оно содержит только положительные числа.

Как указанные, так и другие возможные способы доказательства, сводятся к доказательству неравенств $\frac{2x^2y}{x^4+y^2} \le 1$ *и* $\frac{2xy^2}{y^4+x^2} \le 1$*, которые, в свою очередь, являются следствиями верного неравенства* $a^2+b^2 \ge 2ab$.

Отметим также, что традиционный способ доказательства неравенств, связанный с преобразованием разности его левой и правой части, приводит к очень громоздким выкладкам.

2.2. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные его сторонам. Точки пересечения касательных со сторонами треугольника являются вершинами шестиугольника *ABCDEF*. Верно ли, что противолежащие стороны этого шестиугольника попарно равны?

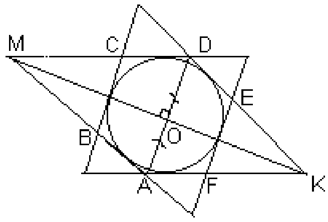


Рис. 2а

Ответ: верно.

Первый способ. Продолжим стороны *AB* и *DC* до пересечения в точке *M* (см. рис. 2а). Тогда, *AMDK* – описанный параллелограмм, то есть – ромб. Следовательно, *O* – середина *AD*.

Аналогично доказывается, что *O* – середина *BE* и середина *CF*. Равенство противолежащих сторон шестиугольника следует из равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними:

$\Delta AOB = \Delta DOE$; $\Delta BOC = \Delta EOF$; $\Delta COD = \Delta FOA$ (см. рис. 2б).

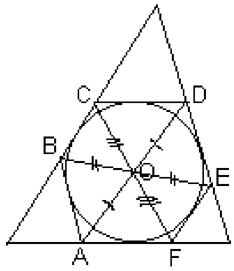


Рис. 2б

Второй способ. Параллельные касательные к окружности симметричны относительно ее центра *O*, поэтому, точки их пересечения также попарно симметричны относительно *O* (см. рис. 2б). Значит, отрезки *AB* и *ED*, *BC* и EF, *CD* и *FA* попарно симметричны, следовательно, *AB* = *ED*, *BC* = EF, *CD* = *FA*, что и требовалось доказать.

2.3. Укажите все натуральные значения *n* такие, что (*n* – 1)! делится на *n*. (*Напомним, что m!* = 1·2·...·(*m* – 1)·*m*)

Ответ: все составные числа, большие 5.

Никакое простое число решением являться не может, так как в этом случае, данное число (*n* – 1)! не содержит простой множитель *n*.

Пусть *n* – составное число, большее пяти, тогда *n* = *a*·*b*, где *a* и *b* – различные натуральные числа, отличные от 1, или $n = p^2$, где *p* – простое.

В первом случае (*n* – 1)! = 1·2·...·(*n* – 2)·(*n* – 1) содержит сомножители *a* и *b*, значит, делится на *n*. Во втором случае, если *n* > 5, то (*n* – 1)! содержит сомножители *p* и 2*p* (так как $2p < p^2 = n$), то есть, делится на *n*.

Осталось проверить число 4 – единственное составное, меньшее 5. Оно не является решением, так как 3! = 6 не делится на 4.

3.1. Существуют ли иррациональные числа *x* и *y* такие, что числа $x + y^2$ и $x + 2y$ – рациональные?

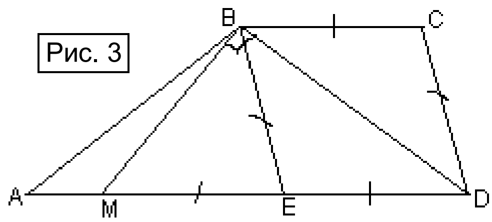
Ответ: существуют, например, $x = 2\sqrt{2}$; $y = 1 - \sqrt{2}$.

Пусть $x + y^2 = p$, $x + 2y = q$, где p и q – рациональные числа. Вычитая почленно, получим, что $y^2 - 2y + r = 0$, где $r = q - p \in Q$. Выберем значение r так, чтобы это квадратное уравнение имело иррациональные корни, например, $r = -1$. Тогда, корни уравнения: $y = 1 \pm \sqrt{2}$. Для того, чтобы выражение $x + 2y$ принимало какое - либо рациональное значение, например, $q = 2$, можно выбрать $x = \mp 2\sqrt{2}$. Тогда, первое из данных условий выполняется автоматически при $p = q - r = 3$.

Из приведенного рассуждения следует, что пар (x; y), удовлетворяющих условию, – бесконечное множество, в частности, к указанному значению x можно прибавить любое рациональное число.

3.2. В трапеции *ABCD* меньшее основание *BC* равно боковой стороне *CD*. Докажите, что если $AD > 2BC$, то $\angle ABD$ – тупой.

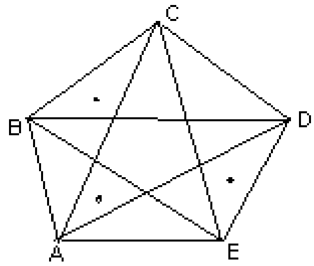
Рис. 3



Проведем в данной трапеции *ABCD* отрезок *BE*, параллельный стороне *CD* (см. рис. 3), который разбивает трапецию на ромб *BCDE* и треугольник *ABE*.
На стороне *AE* треугольника *ABE* отложим отрезок *ME*, равный стороне ромба.

Так как $BE = ME = DE$, то $\angle MBD = 90°$. По условию, $AD > 2BC$, поэтому, точка *M* лежит между *A* и *E*. Следовательно, $\angle ABD > \angle MBD = 90°$, то есть, $\angle ABD$ – тупой, что и требовалось доказать.

3.3. Какое наименьшее количество точек надо расположить внутри выпуклого пятиугольника *ABCDE*, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в точках *A*, *B*, *C*, *D* и *E* лежала хотя бы одна точка?



<u>Ответ</u>: три точки.

Один из возможных примеров указанного расположения точек показан на рис. 4. Еще четыре возможные расстановки – аналогичны.

Меньшим количеством точек обойтись не удастся, так как существуют три треугольника с вершинами *A*, *B*, *C*, *D* и *E*, не имеющие общих внутренних точек, например, *ABC*, *ACD* и *ADE*.

Рис. 4

В каждом из этих треугольников должна быть отмечена хотя бы одна точка.

4.1. Представьте многочлен $x^7 + x^5 + 1$ в виде произведения двух многочленов.

<u>Ответ</u>: $x^7 + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

<u>Первый способ</u>. $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 + x^5 + x^3) - (x^3 - 1) = x^3(x^4 + x^2 + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3(x^2 - x + 1) - x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$, так как $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

<u>Второй способ</u>. $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 + x^6 + x^5) - (x^6 - 1) = x^5(x^2 + x + 1) - (x^3 + 1)(x^3 - 1) = x^5(x^2 + x + 1) - (x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

Если исходить из предположения, что все коэффициенты искомых множителей – целые числа, то ответ можно получить, воспользовавшись методом «неопределенных коэффициентов».

4.2. Существует ли четырехугольник, не имеющий ни центра симметрии, ни оси симметрии, который можно разрезать на два равных четырехугольника?

<u>Ответ</u>: существует.

Рассмотрим, например, квадрат *ABCD* и через его центр *O* проведем две взаимно перпендикулярные прямые, не параллельные сторонам квадрата и не содержащие вершины (см. рис. 5). При повороте с центром *O* на 90° в любом направлении образом квадрата *ABCD* является тот же квадрат, а образом одной из проведенных прямых – другая.

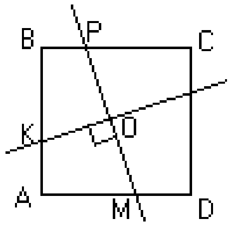


Рис. 5

Например, если рассмотреть поворот с центром *O*, при котором образом вершины *A* является вершина *B*, то $D \to A$, а $B \to C$. В этом случае, образом точки *M* является точка *K*, а образом точки *K* – точка *P*. Следовательно, при таком повороте, $OMAK \to OKBP$, поэтому, эти четырехугольники равны. Значит, четырехугольник *ABPM* – искомый.

Из приведенного рассуждения следует, что примером искомого четырехугольника может являться прямоугольная трапеция, в которой сумма оснований равна меньшей боковой стороне. Серединный перпендикуляр к большей боковой стороне разбивает ее на два равных четырехугольника.

4.3. В компании из *n* человек есть «шпион» – человек, который знает каждого члена этой компании, но его не знает никто из них. Вы можете спросить любого из членов компании про любого другого человека, знает он его или нет, и получить честный ответ Сможете ли вы выявить «шпиона», задав (*n* – 1) вопрос?

<u>Ответ</u>: да.

<u>Первый способ</u>. Выберем произвольным образом двух человек и спросим у одного из них про другого. В случае положительного ответа, тот, о ком спрашивали – не «шпион», в случае отрицательного – тот, кого спрашивали – не «шпион». Значит, одного человека можно исключить из числа «подозреваемых» и их останется (*n* – 1). Повторяя эту операцию, мы на каждом «шаге» будем уменьшать количество «подозреваемых» на одного. Таким образом, после того, как будет задано (*n* – 1) вопросов, останется один «подозреваемый», который и является «шпионом».

Метод, использованный при доказательстве, называется «метод спуска».

<u>Второй способ</u>. Докажем утверждение методом математической индукции, присвоив членам компании номера от 1 до *n*. Для *n* = 2 утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для компании, в которой (*n* – 1) человек. Спросим первого человека, знает ли он человека с номером *n*. Если знает, то человек с номером *n* – не «шпион». Тогда, по предположению индукции, мы сумеем найти «шпиона» среди людей с номерами от 1 до *n* – 1, задав (*n* – 2) вопроса. Если же первый не знает *n* - го, то первый – не «шпион», значит, задав (*n* – 2) вопроса, мы сумеем найти «шпиона» среди людей с номерами от 2 до *n*. Таким образом, задав (*n* – 1) вопрос, можно выявить «шпиона».

Отметим, что меньшим количеством вопросов выявить «шпиона» невозможно. Доказать это можно, например, так. За любой вопрос мы сможем получить следующую информацию: не более, чем про одного человека узнать, что он не «шпион» и увеличить количество людей, которых знает второй человек, не более, чем на 1. «Шпион» будет найден в одном из двух случаев: 1) если мы выяснили, что количество людей, которых знает какой - то человек, равно (n – 1); 2) если мы выяснили, что (n – 1) человек не являются «шпионами». За один вопрос каждый из этих параметров увеличивается не более, чем на 1, поэтому, и вопросов потребуется не менее, чем (n – 1).

5.1. Найдите все наборы, состоящие из 11 чисел, если известно, что каждое из этих чисел равно квадрату суммы остальных десяти чисел.

Ответ: (0; 0; ...; 0); (0,01; 0,01; ...; 0,01).

Так как каждое из чисел $x_0, x_1, \ldots, x_{10}$ является квадратом, то все числа в наборе – неотрицательны и их сумма также неотрицательна. Далее возможны различные способы рассуждений.

Первый способ. Пусть x – любое из чисел искомого набора, а s – сумма всех чисел этого набора. Тогда, по условию, x – корень уравнения $x = (s-x)^2$, которое, в данном случае (так как $x \geq 0$ и $s \geq x$), равносильно уравнению $\sqrt{x} = s - x$.

При $x \geq 0$ левая часть полученного уравнения – возрастает а правая – убывает, следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Это означает, что искомый набор состоит из одинаковых чисел.

Решив уравнение $x = (10x)^2$, получим, что $x = 0$ или $x = 0{,}01$.

Доказать, что уравнение $x = (s-x)^2$ при $x \geq 0$ и $s \geq x$ имеет не более одного корня можно по другому: уравнение $x = (s-x)^2$ равносильно квадратному уравнению $x^2 - (2s+1)x + s^2 = 0$, один из корней которого $x_1 = \dfrac{2s+1+\sqrt{4s+1}}{2}$ – посторонний, так как $x_1 > s$. Следовательно, при указанных условиях, уравнение $x = (s-x)^2$ более одного корня иметь не может.

Второй способ. Из условия следует, что $\sqrt{x_0} = x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10}$ и $\sqrt{x_1} = x_0 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10}$. Вычтем из одного из этих равенств другое: $\sqrt{x_0} - \sqrt{x_1} = x_1 - x_0$ $\Leftrightarrow$ $x_0 + \sqrt{x_0} = x_1 + \sqrt{x_1}$. Так как функции $y = x$ и $y = \sqrt{x}$ – возрастающие, то возрастающей является и функция $y = x + \sqrt{x}$, значит, каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента. Следовательно, равенство $x_0 + \sqrt{x_0} = x_1 + \sqrt{x_1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_0 = x_1$. Аналогичными рассуждениями доказывается, что $x_1 = x_2$, и так далее, то есть, все числа искомого набора между собой равны. Таким образом, мы получим уже решенное уравнение $x = (10x)^2$.

Третий способ. «Упорядочим» числа в наборе: пусть, $x_{10} \geq x_9 \geq \ldots \geq x_1 \geq x_0$. По условию, $x_0 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10})^2$ и $x_1 = (x_0 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10})^2$, поэтому, $(x_0 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10})^2 \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10})^2 \Rightarrow x_0 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10} \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + x_{10}$ $\Leftrightarrow x_0 \geq x_1$. Таким образом, $x_0 = x_1$. Рассуждая аналогично, получим, что искомый набор состоит из одинаковых чисел, то есть, вновь приходим к уравнению $x = (10x)^2$.

5.2. Внутри отрезка AB взяты точки C и D так, что $AC = BD$. Докажите, что для любой точки O, не лежащей на прямой AB, выполняется неравенство $OA + OB > OC + OD$.

Пусть M – середина отрезка AB, тогда, эта точка является и серединой отрезка CD, так как по условию, $AC = BD$. (*Заметим, что это не зависит от порядка расположения точек C и D на отрезке AB.*) Рассмотрим точку P, симметричную точке O относительно M. Соединим точки O и P с точками A, B, M, C и D (см. рис. 6а), тогда M – точка пересечения диагоналей параллелограммов $AOBP$ и $CODP$. По свойству параллелограмма: $OA + OB = OA + AP$; $OC + OD = OC + CP$.

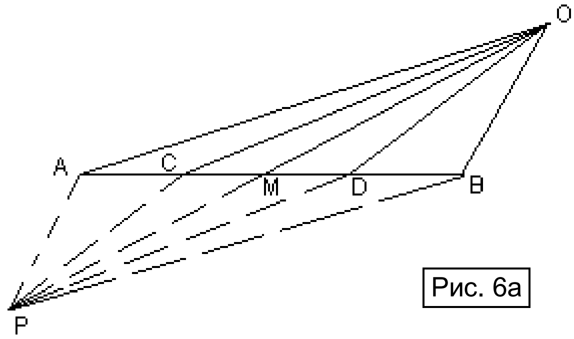


Рис. 6а

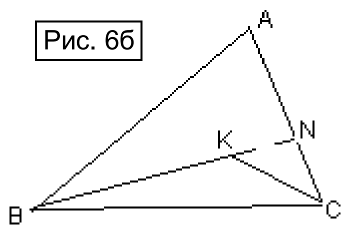


Рис. 6б

Таким образом, задача сводится к доказательству следующего утверждения: сумма расстояний от вершин O и P треугольника AOP до вершины A больше, чем сумма расстояний от этих же вершин до точки C, лежащей на медиане AM.

Обобщим это утверждение. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что *для любой точки K, лежащей внутри треугольника*, выполняется неравенство: $AB + AC > KB + KC$. Пусть N – точка пересечения луча BK со стороной AC (см. рис. 6б). Тогда, в ΔABN: $AB + AN > BN = KB + KN$; в ΔKNC: $KN + NC > KC$. Сложим полученные неравенства почленно: $AB + AN + KN + NC > BK + KN + KC \Leftrightarrow AB + AC + KN > KB + KN + KC \Leftrightarrow AB + AC > KB + KC$, что и требовалось доказать.

Отметим, что рассмотренная вспомогательная задача является леммой, используемой при доказательстве многих утверждений, связанных с неравенством треугольника.

Например, с ее помощью доказывается «классическое» неравенство $p < AK + BK + CK < 2p$, *где K – произвольная точка внутри* ΔABC, *а p – его полупериметр.*

Действительно, так как $AK + BK > AB$, $BK + CK > BC$, $CK + AK > CA$, *то, сложив эти неравенства, получим, что* $2(AK + BK + CK) > 2p \Leftrightarrow AK + BK + CK > p$. *С другой стороны, используя доказанную лемму, получим три неравенства:* $AB + AC > KB + KC$, $BA + BC > KA + KC$, $CA + CB > KA + KB$. *Сложив эти неравенства, получим, что* $4p > 2(KA + KB + KC) \Leftrightarrow AK + BK + CK < 2p$, *что и требовалось доказать.*

5.3. Сколько различных значений можно получить, расставляя всеми возможными способами скобки в выражении 2 : 3 : 5 : 7 : 11 : 13 : 17 : 19 : 23 : 29?

Ответ: 256.

При любой расстановке скобок данное выражение можно представить в виде дроби. Тогда, так как все данные числа – простые, результат вычислений будет однозначно определяется тем, куда «попало» каждое из этих чисел: в числитель или в знаменатель. Очевидно, что независимо от расстановки скобок, число 2 попадает в числитель, а число 3 – в знаменатель. Каждое из следующих чисел может «попасть» как в числитель, так и в знаменатель, например, если 2 : (3 : 5) ..., то число 5 – в числителе, а если (2 : 3) : 5 ..., то число 5 – в знаменателе.

Докажем, что существуют расстановки скобок, при которых каждое из чисел 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 «попадает» как в числитель, так и в знаменатель, независимо от расположения остальных чисел. Для этого, например, разобьем все данные числа, начиная с числа 3, на группы следующим образом: каждая группа начинается с числа, которое должно «попасть» в знаменатель, и может содержать еще несколько (в том числе, и ноль) чисел, идущих следом за ним, которые все должны «попасть» в числитель. Эти группы заключаем в скобки и больше нигде скобок не ставим. Тогда, первое число каждой группы попадет в знаменатель, так как на него непосредственно делится двойка, а остальные числа группы «попадут» в числитель, так как на них делится первое число из этой группы, «попавшее» в знаменатель.

Таким образом, количество чисел, которые могут являться значением данного выражения при всех возможных расстановках скобок, равно $2^8 = 256$.

Эту задачу можно обобщить для любого количества чисел, причем они не обязательно должны быть простыми. Расставляя всеми возможными способами скобки в выражении $a_1 : a_2 : ... : a_n$, *где каждые два числа – взаимно просты, можно получить* 2^{n-2} *различных значения.*

Математическая регата. 9 класс. 18 октября 2003 года

1.1. Даны два квадратных трехчлена, сумма коэффициентов каждого из которых равна 1. Эти трехчлены перемножили и получили многочлен. Найдите сумму его коэффициентов.

Ответ: 1.

Воспользуемся тем, что сумма коэффициентов произвольного многочлена $S(x)$ равна $S(1)$. Тогда, если $S(x) = P(x) \cdot Q(x)$, то сумма коэффициентов многочлена $S(x)$ равна $P(1) \cdot Q(1) = 1$.

1.2. Каждая из высот параллелограмма не меньше той стороны, которой она перпендикулярна. Найдите угол между диагоналями параллелограмма.

Ответ: 90°.

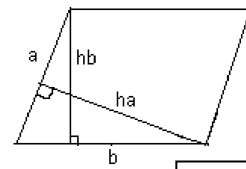


Рис. 1

Пусть a и b – длины сторон параллелограмма, а h_a и h_b – длины проведенных к ним высот. По условию, $h_a \geq a$ и $h_b \geq b$. Кроме того, $a \geq h_b$ и $b \geq h_a$ (см. рис. 1). Таким образом, $h_a \geq a \geq h_b \geq b \geq h_a$, следовательно, $h_a = a = h_b = b$. Это означает, что данный параллелограмм является квадратом, то есть, угол между диагоналями – прямой.

1.3. Турнир по боксу проходил по «олимпийской системе» (в каждом круге проигравшие выбывают). Сколько боксеров участвовало в турнире, если по окончании турнира выяснилось, что 32 человека выиграло боев больше, чем проиграло?

Ответ: 128.

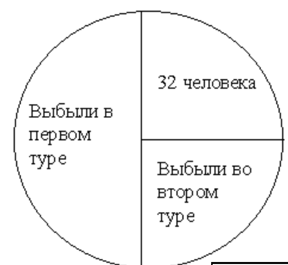


Рис. 2

Участники, выбывшие после первого круга, проиграли по одному бою и не выиграли ни одного. Участники, выбывшие после второго круга, по одному бою выиграли и по одному бою проиграли. Поэтому боксеры, которые выиграли больше боев, чем проиграли – это те, которые выиграли хотя бы по два боя, то есть прошли в третий круг. Во второй круг прошла половина участников, а в третий – четверть (см. рис. 2). Следовательно, 32 человека составляют четверть от всех участников турнира, а общее количество боксеров равно 128.

2.1. Известно, что положительные числа a и b удовлетворяют неравенству: $\frac{1+ab}{a+b}<1$.

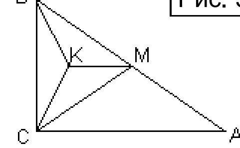
Докажите, что одно из этих чисел больше 1, а другое – меньше 1.

Так как $a + b > 0$, то данное неравенство равносильно неравенству $1 + ab < a + b$ $\Leftrightarrow \ (1-a)-(b-ab)<0 \ \Leftrightarrow \ (1-a)(1-b)<0 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} a<1, \\ b>1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a>1, \\ b<1 \end{cases}$, что и требовалось доказать.

2.2. Можно ли разрезать прямоугольный треугольник с углом 30° на подобные непрямоугольные треугольники?

Ответ: да, можно.

Рис. 3



Пусть ABC – данный треугольник, в котором $\angle BAC = 30°$. Проведем медиану CM, после чего точку K – центр равностороннего треугольника BCM соединим с его вершинами (см. рис. 3). Треугольники AMC, MKC, BKM и CKB – равнобедренные с углом 120° при вершине, поэтому являются подобными.

2.3. Сколько существует не равных между собой треугольников, длины сторон которых – натуральные числа, а периметр равен 20?

Ответ: 8.

Пусть a, b и c – длины сторон треугольника ($a \geq b \geq c$). Докажем, что $6 < a < 10$. Предположим, что $a \leq 6$, тогда $b \leq 6$ и $c \leq 6$, то есть, $P = a + b + c < 20$ – противоречие. Предположим, что $a \geq 10$, тогда $b + c > a \geq 10$, то есть, $P > 20$ – противоречие.

Все возможные треугольники, у которых большая сторона имеет длину 9, 8 или 7, находим перебором (см. таблицу).

a	9	9	9	9	8	8	8	7
b	9	8	7	6	8	7	6	7
c	2	3	4	5	4	5	6	6

3.1. Дан квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, все коэффициенты которого отличны от нуля. Ваня и Петя должны найти количество его корней. Ваня случайно поменял местами коэффициенты a и b и получил, что трехчлен имеет один корень. Петя вместо этого поменял местами b и c и также получил, что корень – один. Сколько корней у трёхчлена на самом деле?

Ответ: 0.

Так как трехчлен $bx^2 + ax + c$ имеет один корень, то $a^2 - 4bc = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4bc$. Аналогично, так как трехчлен $ax^2 + cx + b$ также имеет один корень, то $c^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow c^2 = 4ab$. Перемножив полученные равенства и разделив обе части на ac, получим, что $ac = 16b^2$.

Дискриминант данного трехчлена: $D = b^2 - 4ac = b^2 - 64b^2 = -63b^2 < 0$ при $b \neq 0$. Следовательно, данный трехчлен корней не имеет.

Можно доказать, что любой трехчлен, удовлетворяющий условию задачи, имеют вид: $4kx^2 + kx + 4k$, *где* $k \neq 0$.

3.2. Дана трапеция, основания которой имеют длины 4 и 5. Пользуясь только односторонней линейкой (без делений), постройте отрезок длины 1.

Пусть $ABCD$ – данная трапеция, причем $BC = 4$. Воспользуемся тем, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой (это можно доказать, используя, например, векторы или гомотетию).

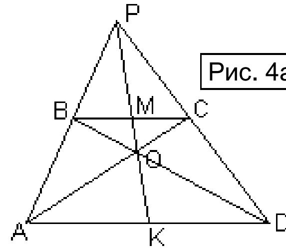


Рис. 4а

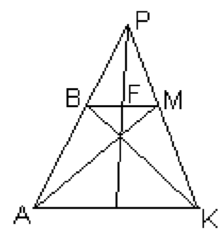


Рис. 4б

Проведем диагонали трапеции AC и BD (O – точка их пересечения) и продолжим боковые стороны до пересечения в точке P (см. рис. 4а). Тогда прямая OP пересечет основания трапеции в их серединах, точках M и K, поэтому $BM = 2$. Выполнив аналогичное построение, например, для трапеции $ABMK$, получим, что $BF = FM = 1$ (см. рис. 4б).

3.3. Из простого двузначного числа вычли число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, которое также оказалось простым, и получили квадрат натурального числа. Каким могло быть исходное число?

Ответ: 73.

Пусть исходное число $\overline{ab} = 10a + b$. Тогда число $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$ является квадратом натурального. Поэтому число $a - b$ также должно являться полным квадратом, то есть, $a - b = 1$ или $a - b = 4$. Поскольку числа $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ – простые, то обе цифры a и b – нечетные, значит, $a - b = 4$. Перебирая все варианты, находим числа 51, 73 и 95, из которых простым является только 73, причем число 37 – также простое.

4.1. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $y - x^2$, если $|x| + |y| \le 13$.

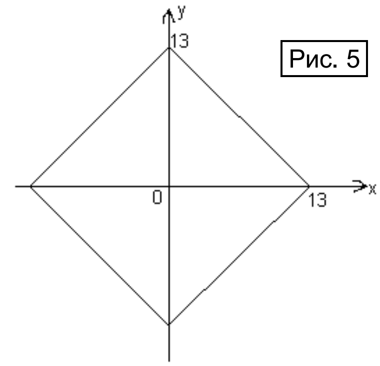


Рис. 5

Ответ: наибольшее значение равно 13, а наименьшее значение равно –169.

Построим график уравнения $|x| + |y| = 13$, тогда данному неравенству удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих этому графику и точек, лежащих внутри ограниваемой им области (см. рис. 5).

Пусть $y - x^2 = t$, тогда решение задачи сводится к тому, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения переменной t, для которых график функции $y = x^2 + t$ имеет общие точки с найденным множеством.

Так как график указанной функции получается из параболы $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси y, то: 1) наибольшее значение t достигается, если вершиной параболы $y = x^2 + t$ является точка (0; 13), то есть, при $t = 13$; 2) наименьшее значение t достигается, если парабола $y = x^2 + t$ проходит через точки (13; 0) и (–13; 0), то есть, при $t = -169$.

4.2. Даны треугольник ABC и точки D и E такие, что $\angle ADB = \angle BEC = 90°$. Докажите, что длина отрезка DE не превосходит половины периметра треугольника ABC.

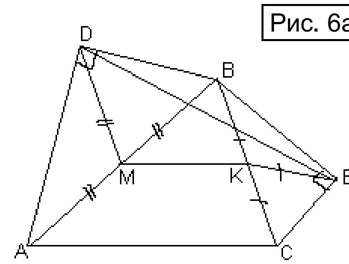


Рис. 6а

Пусть M и K – середины сторон AB и BC данного треугольника ABC соответственно (см. рис. 6а). Тогда DM – медиана прямоугольного треугольника ADB, проведенная к гипотенузе, то есть, $DM = 0{,}5AB$. Аналогично, так как EK – медиана треугольника BEC, то $EK = 0{,}5BC$. MK – средняя линия треугольника ABC, значит, $MK = 0{,}5AC$. Так как длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы, то $DE \le DM + MK + KE = 0{,}5(AB + AC + BC) = 0{,}5P_{ABC}$, что и требовалось доказать.

Те же идеи можно реализовать и по другому.

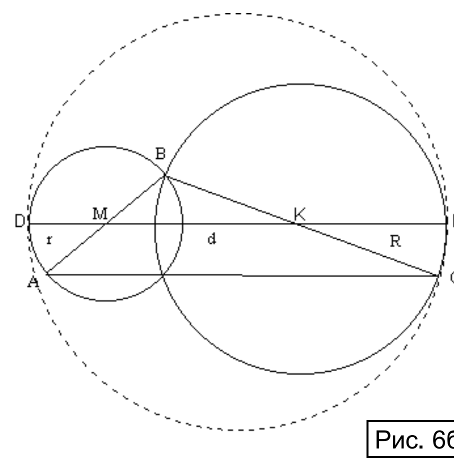


Рис. 6б

Пусть R и r – радиусы окружностей, построенных на сторонах AB и BC данного треугольника, как на диаметрах, а d – длина средней линии MK (см. рис. 6б). Тогда полупериметр треугольника ABC равен: $p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = R + r + d$. Рассмотрим еще одну окружность с центром на прямой MK, которая касается обеих уже построенных окружностей.

Из условия следует, что точки D и E лежат на окружностях с центрами M и K соответственно, поэтому, расстояние DE будет наибольшим, если эти точки являются точками попарного касания окружностей. В этом случае, DE – диаметр большой окружности, причем, $DE = R + r + d$.

4.3. Может ли число, десятичная запись которого содержит более одной цифры, равняться произведению своих цифр?

Ответ: нет, не может.

Рассмотрим произвольное n – значное число, где $n \ge 2$: $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} \ge \overline{a_n 0\ldots00} \ge a_n \cdot 10^{n-1} > a_n \cdot \left(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}\right)$, так как каждый сомножитель в скобках меньше 10.

5.1. Найдите, какие значения может принимать сумма $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$, если известно, что $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$ и $x \neq y$.

Ответ: 2.

$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{xy+1}=\frac{1}{xy+1}-\frac{1}{y^2+1} \Leftrightarrow \frac{xy-x^2}{(x^2+1)(xy+1)}=\frac{y^2-xy}{(y^2+1)(xy+1)}$. Так как $x \neq y$, то из полученного равенства следует, что $\frac{x}{x^2+1}=\frac{y}{y^2+1} \Leftrightarrow xy^2 + x = x^2y + y \Leftrightarrow (x - y)(1 - xy) = 0$. Учитывая условие $x \neq y$, получим, что $xy = 1$.

Тогда $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}=2\cdot\frac{2}{xy+1}=2$.

5.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60°$, $\angle BCA = \angle CAD = 30°$. Найдите BD, если $AB = 2$ см.

Ответ: 2 см или 4 см.

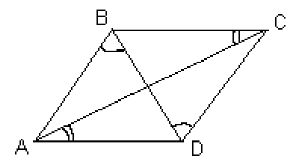


Рис. 7а

Из условия следует, что $ABCD$ – параллелограмм. Рассмотрим осевую симметрию относительно прямой BD, при которой образом точки A является точка A'. Тогда $BA' = BA$; $DA' = DA$; $\angle A'BD = \angle ABD = 60°$; $\angle BA'A = \angle BAA' = 30°$. Возможны два случая:

1) Точка A' совпала с точкой C (см. рис. 7а). Тогда, $ABCD$ – ромб с острым углом 60°, значит, $BD = AB = 2$ (см).

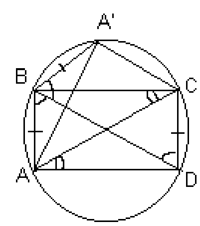


Рис. 7б

2) Точка A' не совпала с точкой C. Так как $\angle ABD$ – острый, то отрезок AA' пересекает луч BD (см. рис. 7б).

В этом случае рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Точка A' лежит на этой окружности, так как $\angle BA'A = \angle BCA$, а точка D – поскольку BD и $A'C$ – основания равнобокой трапеции. Следовательно, $\angle BDA = \angle BCA = 30°$, поэтому, $ABCD$ – прямоугольник.

Из прямоугольного треугольника ABD, в котором $\angle BDA = 30°$, находим, что $BD = 2AB = 4$ (см).

Для тех учащихся 9 классов, кто знаком с простейшими тригонометрическими формулами, можно предложить другой способ решения, использующий теорему синусов.

Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и $\angle ADB = \alpha$. Тогда $\angle AOB = 30° + \alpha$; $\angle BAC = 90° - \alpha$.

Из ΔAOD: $\frac{AO}{\sin\alpha}=\frac{DO}{\sin 30^\circ}$; из ΔAOB: $\frac{AO}{\sin 60^\circ}=\frac{BO}{\sin(90^\circ-\alpha)}$. Разделим первое равенство на второе, учитывая, что $BO = DO$ и $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$. Получим, что $\frac{\sin 60^\circ}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin 30^\circ}$, то есть, $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $2\alpha = 60°$ или $2\alpha = 120° \Leftrightarrow \alpha = 30°$ или $\alpha = 60°$. Таким образом, мы получили оба случая, рассмотренных в основном решении.

Аналогичные соотношения можно получить, если использовать равновеликость треугольников AOD и AOB, дважды вычислив их площади по формуле $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

5.3. Даны 70 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 200. Докажите, что хотя бы два из них отличаются на 4, 5 или 9.

Предположим, что это не так. Пусть a_1, a_2, …, a_{70} – данные 70 чисел: Рассмотрим другой набор чисел: a_1, a_2, …, a_{70}, a_1 + 4, a_2 + 4, …, a_{70} + 4, a_1 + 9, a_2 + 9, …, a_{70} + 9.

В этом наборе 210 натуральных чисел, все они различны (по нашему предположению) и самое большое из них не превосходит 200 + 9 = 209.

Получено противоречие (принцип Дирихле!), поэтому хотя бы два из данных чисел отличаются на 4, 5 или 9, что и требовалось доказать.

Математическая регата 9 классов 9.10.2004

9 класс

1.1. Сократите дробь: $\dfrac{\sqrt{a^2-a}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2-2a}}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{-a}+\sqrt{-a-1}}{\sqrt{2}}$.

Найдем область определения данного выражения: $\begin{cases} a^2-a\ge 0 \\ a^2-1\ge 0 \\ 2-2a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1)\ge 0 \\ (a-1)(a+1)\ge 0 \\ a<1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $a \le -1$. Используя тождество $\sqrt{xy}=\sqrt{|x|}\cdot\sqrt{|y|}$, получим: $\dfrac{\sqrt{a^2-a}+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2-2a}} = \dfrac{\sqrt{a(a-1)}+\sqrt{(a-1)(a+1)}}{\sqrt{2(1-a)}} = \dfrac{\sqrt{-a}\cdot\sqrt{1-a}+\sqrt{1-a}\cdot\sqrt{-a-1}}{\sqrt{2(1-a)}} = \dfrac{\sqrt{-a}+\sqrt{-a-1}}{\sqrt{2}}$.

1.2. В прямоугольной трапеции *ABCD* высота *AB* равна сумме оснований *AD* и *BC*. Биссектриса угла *ABC* пересекает сторону *CD* в точке *K*. В каком отношении эта точка делит *CD*?

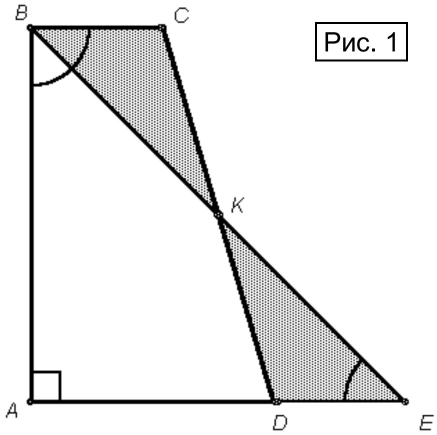


Рис. 1

Ответ: *CK* : *KD* = 1 : 1.

Пусть *E* – точка пересечения прямых *BK* и *AD* (см. рис. 1). Тогда *BAE* – равнобедренный прямоугольный треугольник, поэтому *AD* + *BC* = *AB* = *AE* = *AD* + *DE*, то есть, *BC* = *DE*. Следовательно, треугольники *BKC* и *EKD* равны по стороне и двум прилежащим углам, поэтому, *CK* = *KD*.

1.3. В какое наименьшее количество цветов надо раскрасить доску 100×100, чтобы никакие две соседние клетки (по горизонтали, вертикали или диагонали) не были окрашены в одинаковый цвет?

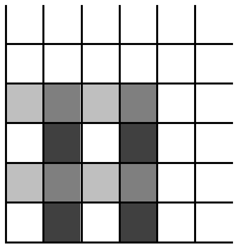


Рис. 2

Ответ: в четыре цвета.

Разобьем доску на квадраты 2×2 и покрасим каждый квадрат в четыре цвета одинаковым образом (см. рис. 2). В этом случае условие задачи выполняется. Обойтись меньшим количеством цветов невозможно, так как внутри такого квадрата каждая клетка соседствует с тремя остальными.

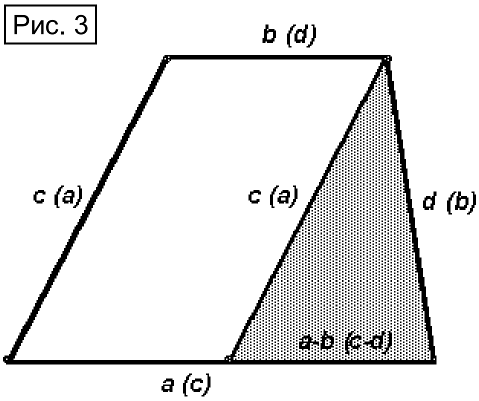
2.1. Известно, что каждое из уравнений $x^2 + 2bx + c = 0$ и $x^2 + 2cx + b = 0$, где $b > 0$ и $c > 0$, имеет хотя бы один корень. Произведение всех корней этих уравнений равно 1. Найдите *b* и *c*.

Ответ: $b = c = 1$.

Так как каждое уравнение имеет хотя бы один корень, то $b^2 - c \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq c$ и $c^2 - b \geq 0 \Leftrightarrow c^2 \geq b$. Кроме того, по теореме Виета, произведение корней первого уравнения равно c, а произведение корней второго уравнения равно b. Из условия следует, что $bc = 1$. Подставим $b = \frac{1}{c}$ в каждое из полученных неравенств. Учитывая, что $b > 0$ и $c > 0$, получим, что $c \leq 1$ и $c \geq 1$ соответственно, то есть, $c = 1$, значит, и $b = 1$.

Отметим, что при найденных значениях b и c каждое из данных уравнений имеет вид $x^2 + 2x + 1 = 0$, то есть, имеет один корень (с точки зрения применения теоремы Виета – два совпадающих корня).

Рис. 3



2.2. Существуют ли четыре отрезка с длинами a, b, c и d такие, что можно составить две трапеции: одну с основаниями a и b и боковыми сторонами c и d, а другую – с основаниями c и d и боковыми сторонами a и b?

Ответ: нет, не существуют.

Так как основания трапеции не могут быть равными, то без ограничения общности можно считать, что $a > b$ и $c > d$.

Предположим, что первая трапеция построена (см. рис. 3). Проведем из ее вершины отрезок, параллельный соответствующей боковой стороне, который разбивает трапецию на параллелограмм и треугольник со сторонами c, d и $a - b$. В силу неравенства треугольника, $d + (a - b) > c \Leftrightarrow a - b > c - d$.

Пусть существует и вторая трапеция, тогда, рассуждая аналогично, получим, что $b + (c - d) > a \Leftrightarrow c - d > a - b$. Полученное противоречие показывает, что две трапеции, удовлетворяющих условию, составить нельзя.

2.3. Существует ли натуральное n такое, что число $n^{2004} - 1$ является какой-либо степенью двойки?

Ответ: нет, не существует.

Преобразуем: $n^{2004} - 1 = (n^{2002})^2 - 1 = (n^{2002} - 1)(n^{2002} + 1)$. Предположим, что данное число является степенью двойки, тогда каждый из двух полученных множителей также является степенью двойки, причем эти множители отличаются на 2. Это возможно только в одном случае, если $n^{2004} - 1 = 2$, а $n^{2004} + 1 = 4$, но таких натуральных n не существует.

3.1. Пусть $xyz = 1$ и $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$, $c = z + \frac{1}{z}$. Вычислите $a^2 + b^2 + c^2 - abc$.

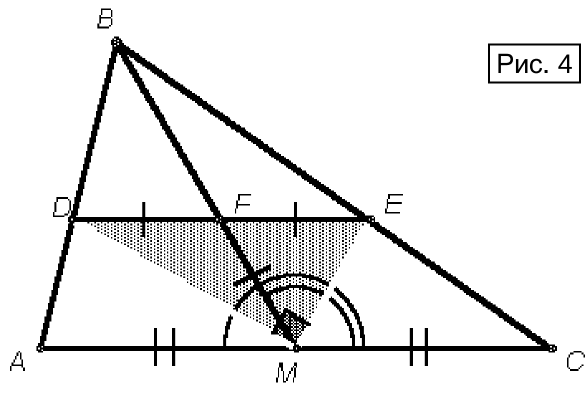
Ответ: 4.

Заметим, что $a = x + \frac{1}{x} = x + \frac{xyz}{x} = x + yz$. Аналогично, $b = y + zx$ и $c = z + xy$. Тогда $a^2 = x^2 + 2xyz + y^2z^2 = x^2 + y^2z^2 + 2$; $b^2 = y^2 + z^2x^2 + 2$; $c^2 = z^2 + x^2y^2 + 2$; $abc = (x + yz)(y + zx)(z + xy) = xyz + x^2y^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + xy^3z + xyz^3 + x^3yz = 2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Следовательно, $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$.

3.2. В треугольнике ABC точка M – середина AC, MD и ME – биссектрисы треугольников ABM и CBM соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке F. Найдите MF, если $DE = d$.

Ответ: $0{,}5d$.

Рис. 4



По свойству биссектрисы из треугольников *AMB* и *CMB* (см. рис. 4) получим, что $\frac{AD}{BD}=\frac{AM}{BM}$ и $\frac{CE}{BE}=\frac{CM}{BM}$. По условию, *AM* = *CM*, значит, $\frac{AD}{BD}=\frac{CE}{BE}$, следовательно, *DE* || *AC* (по теореме, обратной теореме Фалеса, для угла *ABC* или же из подобия треугольников *DBE* и *ABC*). Тогда *F* – середина отрезка *DE*.

Так как *MD* и *ME* – биссектрисы смежных углов, то треугольник *DME* – прямоугольный. Его медиана *MF*, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы *DE*.

3.3. На прямой сначала отметили 100 точек, затем отметили середины всех отрезков с концами в ранее отмеченных точках. Какое наименьшее количество точек могло получиться в итоге?

Ответ: 199.

Отмеченные вначале сто точек образуют, помимо прочих, 99 отрезков с концами в соседних точках. Середины этих отрезков не могли быть отмечены ранее, поэтому меньше, чем 99 точек к уже отмеченным ста точкам добавиться не могут.

Покажем, что 199 точек получиться могло. Пусть отмеченные сначала 100 точек расположены на координатной прямой так, что имеют координаты 1, 2, 3, …, 99, 100. Координата середины отрезка *AB* вычисляется по формуле $x=\frac{x_A+x_B}{2}$, поэтому середина любого отрезка с концами в этих точках имеет либо целую, либо полуцелую координату *x* такую, что $1 \le x \le 100$. Таких значений *x* ровно 199.

4.1. Докажите, что $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{2004^2-1}<\frac{3}{4}$.

Заметим, что если $n \neq \pm 1$, то $\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$.

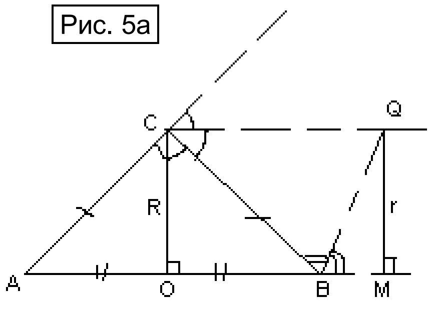
Тогда $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{2004^2-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003}-\frac{1}{2005}\right)=$ $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\right)<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$, что и требовалось доказать.

4.2. Существует ли треугольник, в котором радиус описанной окружности равен радиусу вневписанной окружности (то есть, окружности, касающейся одной из его сторон и продолжений двух других)?

Ответ: да, существует.

Рассмотрим, например, равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC* (см. рис. 5а). Возможны различные способы доказательства того, что он удовлетворяет условию.

Рис. 5а



Первый способ. Середина O гипотенузы AB треугольника является центром описанной около него окружности, а ее радиус $R = CO$, причем CO является также и высотой треугольника.

Центр Q окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AC и AB, является точкой пересечения биссектрис внешних углов B и C треугольника. Так как биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию, то $CQ \parallel AB$. Расстояние QM от точки Q до прямой AB равно радиусу r вневписанной окружности и равно CO.

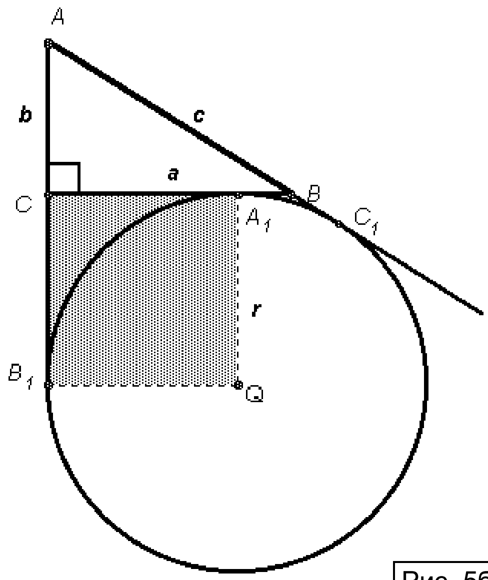


Рис. 5б

Второй способ. Пусть a, b и c – длины сторон треугольника ABC (см. рис. 5б), тогда радиус описанной окружности $R = \frac{1}{2}c$.

Рассмотрим вневписанную окружность с центром Q и радиусом r, касающуюся стороны BC. Если B_1 и C_1 – точки ее касания с продолжениями сторон AC и AB, то из равенства касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что $AB_1 = AC_1 = p = \frac{a+b+c}{2}$. Кроме того, так как в нашем примере $\angle B_1CB = 90°$, то QA_1CB_1 – квадрат, поэтому $CB_1 = r$. Таким образом, $r = p - b = \frac{a-b+c}{2} = \frac{1}{2}c$, поскольку мы рассматриваем треугольник, в котором $a = b$.

Существуют и другие примеры, в том числе не равнобедренных и не прямоугольных треугольников, удовлетворяющие условию, но построить их существенно сложнее.

4.3. Некоторое простое число возвели в четвертую степень и получили десятизначное число. Могут ли все цифры полученного числа быть различными?

Ответ: нет, не могут.

Предположим, что все цифры полученного числа различны, тогда это цифры 0, 1, 2, …, 9, взятые по одному разу. Сумма этих цифр равна 45, то есть, полученное десятизначное число делится на 9. Простое число, которое возвели в четвертую степень, очевидно, не равно трем, поэтому не делится на 3. Следовательно, и десятизначное число не делится на 3, а значит не делится и на 9. Таким образом, оно имеет в своей записи хотя бы две одинаковые цифры.

5.1. Существуют ли числа a, b, c и d, удовлетворяющие неравенству $0 < a < b < c < d$, такие что уравнения $x^4 + bx + c = 0$ и $x^4 + ax + d = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

Ответ: нет, не существуют.

Первый способ. Так как все коэффициенты данных уравнений – положительные числа, то неотрицательных корней эти уравнения иметь не могут.

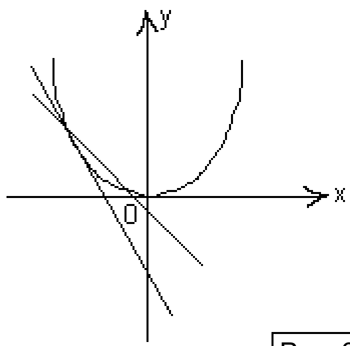


Рис. 6

Пусть число x_0 является общим корнем данных уравнений, тогда $x_0^4 + bx_0 + c = 0$ и $x_0^4 + ax_0 + d = 0$ – верные числовые равенства. Вычтем из одного равенства другое, тогда $(b - a)x_0 + (c - d) = 0$ – также верное числовое равенство. Следовательно, $x_0 = \frac{d - c}{b - a} > 0$. Полученное противоречие показывает, что общих корней данные уравнения не имеют.

Второй способ. Используем графические соображения. Запишем данные уравнения в виде $x^4 = -bx - c$ и $x^4 = -ax - d$. Уравнения имеют общий корень тогда, и только тогда, когда графики линейных функций $y = -bx - c$ и $y = -ax - d$ пересекают график функции $y = x^4$ в одной и той же точке. С одной стороны, так как все коэффициенты в формулах, задающих линейные функции, отрицательны, то эта точка должна лежать во II координатной четверти (см. рис. 6). С другой стороны, ее абсцисса является решением уравнения $-bx - c = -ax - d$, то есть $x = \frac{d - c}{b - a} > 0$. Получено противоречие.

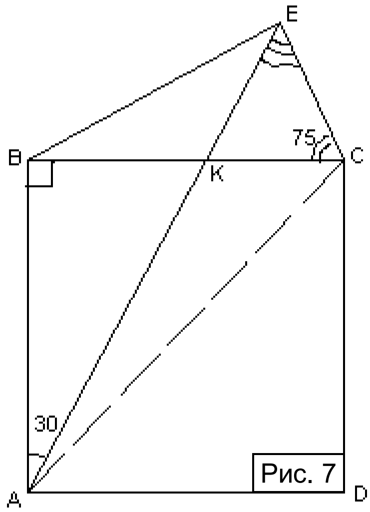


Рис. 7

5.2. Дан квадрат $ABCD$. Луч AE пересекает сторону BC, причем $\angle BAE = 30°$, а $\angle BCE = 75°$. Найдите $\angle CBE$.

Ответ: 30°.

Проведем в данном квадрате диагональ AC (см. рис. 7). Из условия следует, что $\angle EKC = \angle AKB = 60°$, значит $\angle AEC = 45° = \frac{1}{2}\angle ABC$. Поэтому, если провести окружность с центром в точке B и радиусом $R = BA = BC$, то точка E будет лежать на этой окружности. Следовательно, $BE = BC$, то есть, треугольник BEC – равнобедренный с углом 30° при вершине.

Отметим, что задачу также можно решить «обратным ходом», то есть, угадать ответ и с помощью подсчета величин углов доказать, что данная конструкция – «жесткая».

5.3. На окружности расположены шестнадцать точек. Эти точки требуется соединить восемью хордами, не имеющими общих точек (даже общих концов). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1430 способами.

Предположим, что на окружности последовательно отмечено $2n$ точек: A_1, A_2, A_3, A_4, ...A_{2n-1}, A_{2n}. Пусть x_n – количество способов провести n непересекающихся хорд.

Заметим, что любая хорда, удовлетворяющая условию, должна быть проведена так, чтобы по обе стороны от нее располагалось четное количество данных точек. При этом, если какая-то хорда зафиксирована, то группы точек с одной и с другой стороны от нее можно рассматривать независимо, и решать задачу отдельно для каждой группы. Тогда количество способов провести $n - 1$ хорду равно произведению количества способов провести хорды в каждой из образовавшихся групп точек.

Будем последовательно фиксировать хорды A_1A_2, A_1A_4, A_1A_6, …, A_1A_{2n}. Тогда число x_n будет складываться из количества способов провести оставшиеся хорды в каждом из этих n случаев, то есть $x_n = x_{n-1} + x_1 \cdot x_{n-2} + x_2 \cdot x_{n-3} + x_3 \cdot x_{n-4} + \ldots + x_{n-2} \cdot x_1 + x_{n-1}$.

Заметим, что ни какой из способов расстановки хорд мы не подсчитали дважды, так как в каждом из случаев можно провести только одну хорду с концом A_1.

Итак, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ (это можно было заметить и без общей формулы), $x_3 = 5$, $x_4 = 14$, $x_5 = 42$, $x_6 = 132$, $x_7 = 429$, $x_8 = 1430$.

Числа, полученные в процессе решения задачи, называются числами Каталана. Их общая формула: $x_n = \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{n}$, *где* C_{2n+1}^{n} *– количество сочетаний из 2n + 1 по n, то* *есть, количество способов выбрать n предметов из 2n + 1. Более подробно о числах Каталана – см., например, Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник «Конкретная математика» или Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов «Алгебра и теория чисел».*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА 9 КЛАССОВ 9.10.2005

9 класс

1.1. (***6 баллов***) Найдите $x^3 + y^3$, если известно, что $x + y = 5$ и $x + y + x^2y + xy^2 = 24$.

Ответ: 68.

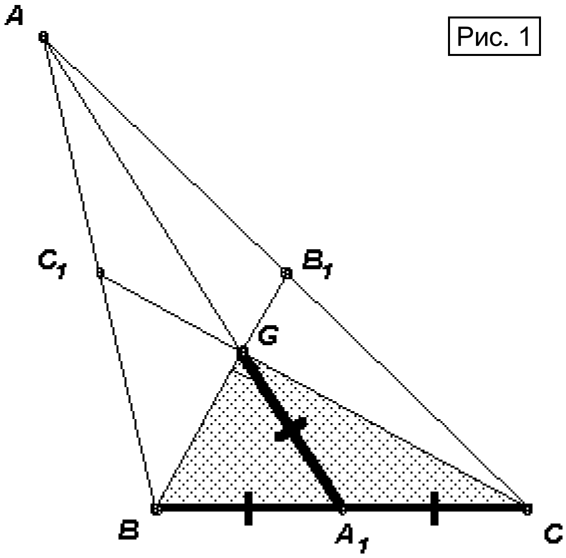
Так как $x + y + x^2y + xy^2 = x + y + xy(x + y) = (x + y)(xy + 1) = 24$, то используя условие $x + y = 5$, получим, что $xy = 3{,}8$. Далее можно действовать по разному:

Первый способ. $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 125 - 3\cdot3{,}8\cdot5 = 68$.

Второй способ. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = 5(25 - 3\cdot3{,}8) = 68$.

1.2. (***6 баллов***) Медиана треугольника в полтора раза больше стороны, к которой она проведена. Найдите угол между двумя другими медианами.

Ответ: 90°.



Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – медианы треугольника ABC, пересекающиеся в точке G, и $AA_1 = 1{,}5BC$ (см. рис. 1).

По свойству медиан треугольника $GA_1 = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{1}{2}BC$. Таким образом, в треугольнике BGC медиана GA_1 равна половине стороны BC, к которой она проведена.

Следовательно, этот треугольник – прямоугольный с прямым углом G, то есть медианы BB_1 и CC_1 пересекаются под прямым углом.

1.3. (***6 баллов***) Можно ли, используя в десятичной записи чисел только цифры 2, 3 и 7, записать три натуральных числа, одно из которых равно произведению двух других?

Ответ: нет, нельзя.

Пусть такие числа *a, b* и *c* существуют, причём $c = ab$. Тогда произведение последних цифр чисел *a* и *b* оканчивается на ту же цифру, что и число *c.* Это произведение может быть равно одному из чисел: 7·7; 7·3; 7·2; 3·3; 3·2 или 2·2. Ни в одном из этих случаев оно не оканчивается цифрой 7, 3 или 2.

2.1. (***7 баллов***) Известно, что число *p* является одним из корней квадратного уравнения $5x^2 + bx + 10 = 0$. Выразите через *p* корни уравнения $10x^2 + bx + 5 = 0$.

Ответ: $\frac{1}{p}$ и $\frac{p}{2}$.

Заметим, что дискриминанты указанных уравнений одинаковы: $D = b^2 - 200$, поэтому, независимо от значения *b*, если первое уравнение имеет корни, то и второе также имеет корни. Далее можно действовать различными способами.

Первый способ. Из условия следует, что выполняется числовое равенство: $5p^2 + bp + 10 = 0$, где $p \neq 0$. Разделив его почленно на p^2, получим: $5+\frac{b}{p}+\frac{10}{p^2}=0 \Leftrightarrow$ $10\left(\frac{1}{p}\right)^2+b\cdot\frac{1}{p}+5=0$, то есть, число $\frac{1}{p}$ является корнем второго уравнения. Другой корень второго уравнения находим по теореме Виета $\frac{1}{2}:\frac{1}{p}=\frac{p}{2}$ или $1:\frac{2}{p}=\frac{p}{2}$.

Отметим, что можно также использовать, что оба корня второго уравнения являются числами, обратными корням первого.

Второй способ. Запишем корни каждого из уравнений по формулам: 1) $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{10}$; 2) $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{20}$. Следовательно, если один из корней первого уравнения равен *p*, то соответствующий корень второго уравнения равен $\frac{p}{2}$. Другой корень находим по теореме Виета.

2.2. (***7 баллов***) Точку, расположенную внутри треугольника, соединили отрезками с серединами его сторон. Образовались три выпуклых четырехугольника, в два из которых можно вписать окружность. Докажите, что и в третий четырехугольник также можно вписать окружность.

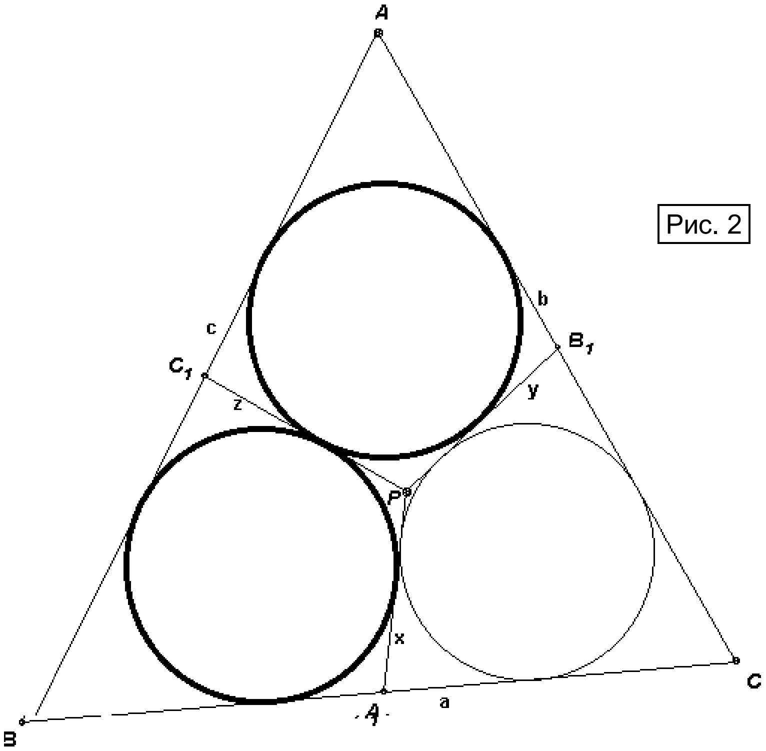


Рис. 2

Пусть точка *P* лежит внутри треугольника *ABC*, серединами сторон которого являются точки A_1, B_1 и C_1. Введем следующие обозначения: $BA_1 = CA_1 = \frac{a}{2}$; $CB_1 = AB_1 = \frac{b}{2}$; $AC_1 = BC_1 = \frac{c}{2}$; $PA_1 = x$; $PB_1 = y$; $PC_1 = z$ (см. рис. 2).

Если для выпуклых четырехугольников PB_1AC_1 и PC_1BA_1 выполняется условие задачи, то в каждом из этих четырехугольников равны суммы противолежащих сторон, то есть: $\begin{cases} \frac{c}{2} + y = \frac{b}{2} + z \\ \frac{c}{2} + x = \frac{a}{2} + z \end{cases}$. Вычитая из первого равенства второе, получим: $y - x = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \Leftrightarrow y + \frac{a}{2} = x + \frac{b}{2}$.

Последнее равенство есть достаточное условие того, что в выпуклый четырехугольник A_1CB_1P можно вписать окружность.

2.3. (***7 баллов***) В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых из них написан слог МА, на остальных – слог НЯ. Каждый ребенок взял по три карточки и стал составлять слова. Оказалось, что из своих карточек 20 детей могут сложить слово МАМА, 30 детей – слово НЯНЯ, а 40 детей – слово МАНЯ. У скольких детей все три карточки одинаковые?

Ответ: у десяти детей.

Каждый ребёнок имеет хотя бы две одинаковые карточки, поэтому может сложить слово МАМА (20 детей) или слово НЯНЯ (30 детей). Ни один ребёнок не может сложить оба слова, так как для этого требуется четыре карточки. Следовательно, всего детей 20 + 30 = 50. Сложить слово МАНЯ (40 детей) могут те и только те дети, у которых имеются карточки обоих видов. Значит, количество детей, у которых все три карточки одинаковые, равно 50 – 40 = 10.

3.1. (***7 баллов***) Известно, что $a^2 + bc = a(b + c)$; $b^2 + ac = b(c + a)$; $c^2 + ab = c(a + b)$. Докажите, что $a = b = c$.

Первый способ. Сложим почленно первое и второе равенства. После приведения подобных слагаемых получим: $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Аналогично, сложив первое и третье равенства, получим, что $a = c$.

Второй способ. Сложим три данных равенства почленно. После приведения подобных слагаемых получим: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

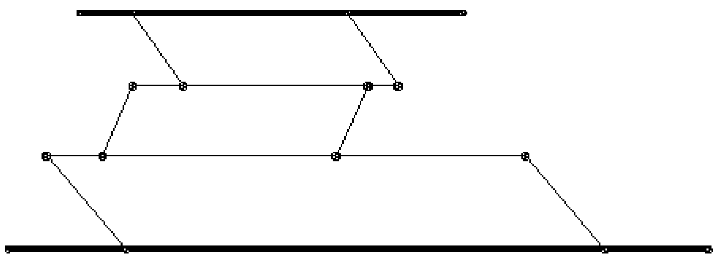


Рис. 3а

3.2. (***7 баллов***) Какое наименьшее нечетное количество сторон может иметь многоугольник, который можно разрезать на параллелограммы?

Ответ: семь.

Если многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то, выбрав произвольную его сторону, можно выстроить некоторую цепочку параллелограммов, начинающуюся на этой стороне и оканчивающуюся на какой-то другой из сторон (см. рис. 3а). Это означает, что в многоугольниках такого типа стороны распадаются на группы отрезков, параллельных некоторым прямым.

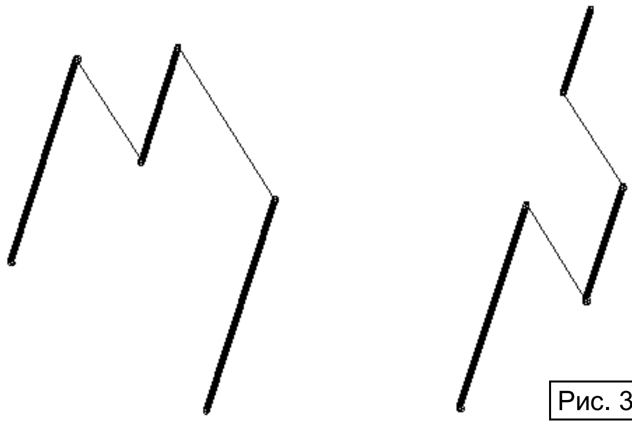


Рис. 3б

Поскольку треугольник не имеет параллельных сторон, разбить его на параллелограммы нельзя.

Предположим, что пятиугольник можно разбить на параллелограммы, тогда для каждой стороны найдется параллельная ей сторона, следовательно, у пятиугольника есть пара параллельных сторон и тройка параллельных сторон (см. рис. 3б). Последнее невозможно, так как среди любых трех сторон пятиугольника найдутся две соседние.

Пример семиугольника, разрезанного на параллелограммы, привести несложно (см. рис. 3в).

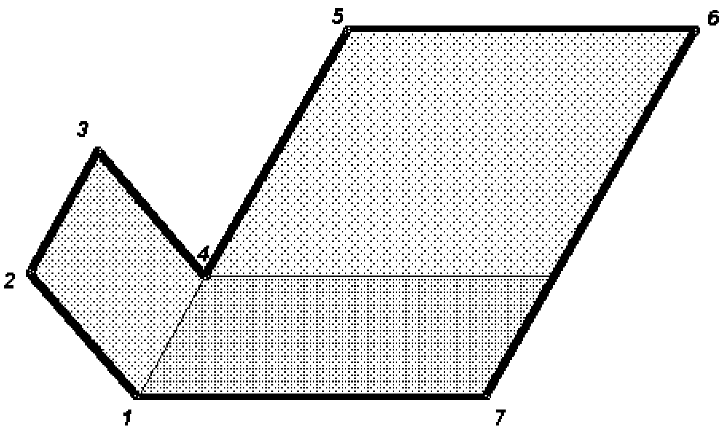


Рис. 3в

3.3. (***7 баллов***) Допустим, что сейчас угол между минутной и часовой стрелкой такой же, как полчаса назад. Найдите все возможные значения этого угла.

Ответ: 82,5° или 97,5°.

Минутная стрелка за полчаса поворачивается на 180°, то есть меняет направление на противоположное. За это время часовая стрелка поворачивается на $\frac{1}{24}$ полного оборота, то есть на 360° : 24 = 15°. Схематически изобразим возможные положения минутной и часовой стрелок (*OM* и OC – начальные положения, *OM*' и *OC*' – через полчаса).

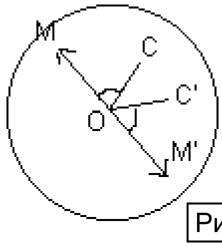


Рис. 4а

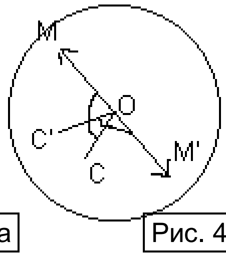


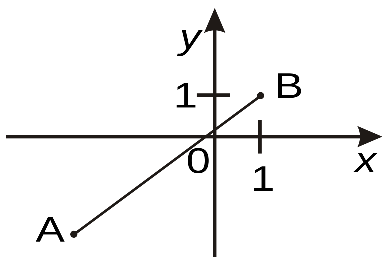
Рис. 4б

Возможны два случая: в начальный момент часовая стрелка «опережала» минутную (см. рис. 4а) или часовая «отставала» от минутной (см. рис. 4б).

Пусть α – искомый угол между стрелками. Для каждого случая составим уравнение: а) $2\alpha + 15° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 82{,}5°$; б) $2\alpha - 15° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 97{,}5°$.

4.1. (***8 баллов***) Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению: $\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=5$.

Рис. 5



Ответ: отрезок AB, где $A(-3; -2)$; $B(1; 1)$ (см. рис. 5).

Пусть $M(x; y)$, $A(-3; -2)$, $B(1; 1)$. Тогда $AM = \sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}$; $BM = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. Так как $AB = \sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2} = 5$, то условие задачи равносильно тому, что $AM + BM = AB$.

Таким образом, точка M удовлетворяет условию т. и т. т., когда она принадлежит отрезку AB.

4.2. (***8 баллов***) В трапеции $ABCD$ точка M лежит на боковой стороне CD так, что $\angle ABM = \angle CBD = \angle BCD = \alpha$. Найдите длину BM, если $AB = b$.

Ответ: $BM = 2b\cos\alpha$.

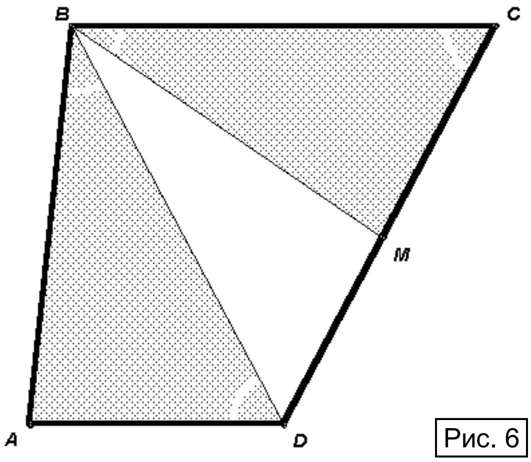


Рис. 6

Первый способ. Из равенства $\angle CBD = \angle BCD$ следует, что $BD = CD$ (см. рис. 6). Так как основания трапеции AD и BC параллельны, то $\angle ADB = \angle CBD = \alpha$. Кроме того, если $\angle ABM = \angle CBD$, то $\angle ABD = \angle MBC$.

Следовательно, треугольники ABD и MBC подобны (по двум углам).

Тогда $\frac{BM}{AB} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BM = b\cdot\frac{BC}{BD}$. Учитывая, что треугольник BDC равнобедренный, получим: $\frac{\frac{1}{2}BC}{BD} = \cos\alpha$, поэтому, $BM = 2b\cos\alpha$.

Второй способ (*возможно, не для 9 класса*). Рассмотрим четырехугольник $ABMD$ (см. рис. 6). Так как $\angle ADM + \angle ABM = \angle ADM + \angle BCD = 180°$, то этот четырехугольник – вписанный. Заметим, что окружность радиуса R, описанная около $ABMD$, совпадает с окружностями, описанными около треугольников ABD и MBD. Кроме того, из треугольника BDC получим, что $\angle BDM = 180° - 2\alpha$. По следствию из теоремы синусов $\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{BM}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$, то есть, $BM = \frac{b\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2b\cos\alpha$.

4.3. (***8 баллов***) На какую наибольшую степень числа 3 может делиться сумма вида
$1! + 2! + 3! + ... + n!$?

Ответ: на третью степень числа 3.

Обозначим данную сумму S_n. Заметим, что $S_7 = 5913$ и это число делится на $3^3 = 27$. При меньших значениях n или при $n = 8$ S_n не делится на 27: $S_1 = 1$; $S_2 = 3$; $S_3 = 9$; $S_4 = 33$; $S_5 = 153$; $S_6 = 873$; $S_8 = 46233$. Если $k \geq 9$, то $k!$ включает в себя произведение $3\cdot6\cdot9$, поэтому делится на 27.

Таким образом, при $n \geq 9$ получим: $S_n = S_7 + 8! + 9! + ...$. В этой сумме одно из слагаемых не делится на 27, а остальные – делятся, поэтому такая сумма не делится на 27.

5.1. (***9 баллов***) Существуют ли три квадратных трехчлена такие, что сумма любых двух из них, увеличенная на 1, также является квадратным трехчленом и имеет те же корни, что и третий трехчлен?

Ответ: да, существуют.

Рассмотрим три квадратных трехчлена, сумма которых, увеличенная на 1, тождественно равна нулю. Например, трехчлены: f(x) = x^2 + x – 1; g(x) = x^2 + 2x – 1; h(x) = –2x^2 – 3x + 1. Для этих трехчленов выполняется условие задачи, так как: 1) f(x) + g(x) + 1 = – h(x); 2) f(x) + h(x) + 1 = – g(x); 3) g(x) + h(x) + 1 = – f(x).

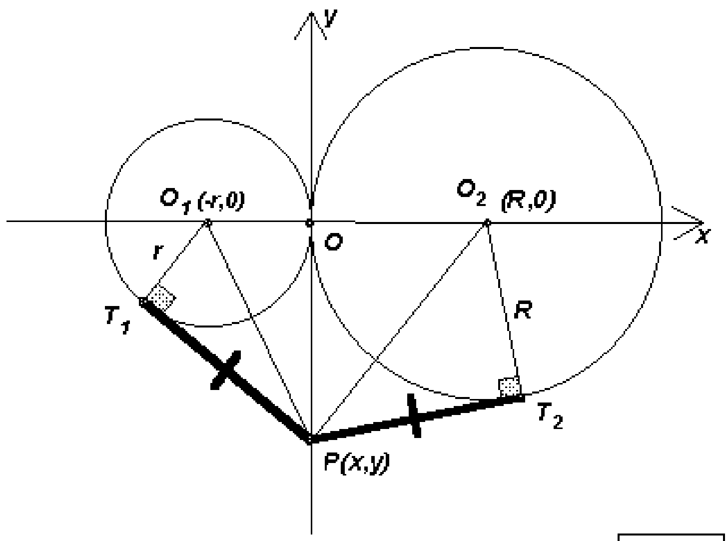


Рис. 7а

5.2. (***9 баллов***) На окружности с центром *O* отмечены точки *A* и *B*. Две другие окружности лежат внутри данной, касаются ее в точках *A* и *B* и касаются друг друга в точке *M*. Найдите геометрическое место точек *M*.

Ответ: внутренние точки дуги окружности с концами в точках *A* и *B* и центром в точке *C* пересечения касательных к большей окружности в точках *A* и *B* (см. рис. 7б).

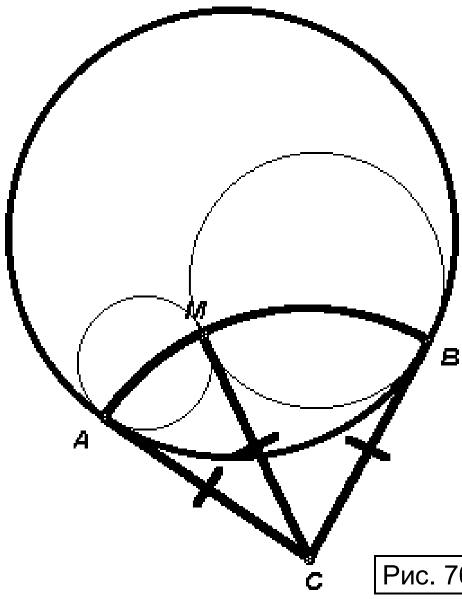


Рис. 7б

Лемма. Пусть две окружности касаются в некоторой точке *O.* Тогда геометрическое место точек *P* таких, что отрезки касательных, проведенных из этих точек к обеим окружностям, равны, есть общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку *O.*

Доказательство. 1) Если точка *P* лежит на общей касательной, то она обладает требуемым свойством, поскольку отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

2) Пусть точка *P* обладает данным свойством. Докажем, что она лежит на общей касательной. Для этого, например, введем систему координат так, чтобы центры окружностей лежали на оси *x*, а общая касательная окружностей совпала с осью *y* (см. рис. 7а). Тогда $PT_1^2 = PT_2^2 \Leftrightarrow PO_1^2 - r^2 = PO_2^2 - R^2 \Leftrightarrow (x+r)^2 + y^2 - r^2 = (x-R)^2 + y^2 - r^2 \Leftrightarrow 2x(R + r) = 0 \Rightarrow x = 0$, то есть точка *P* лежит на оси *y*.

Отметим, что доказанная лемма справедлива и в случае внутреннего касания двух окружностей. Более того, аналогичное ГМТ можно рассмотреть и в случае непересекающихся неконцентрических окружностей. В этом случае искомым ГМТ также является прямая, перпендикулярная линии центров данных окружностей. Такая прямая называется ***радикальной осью*** *двух окружностей.*

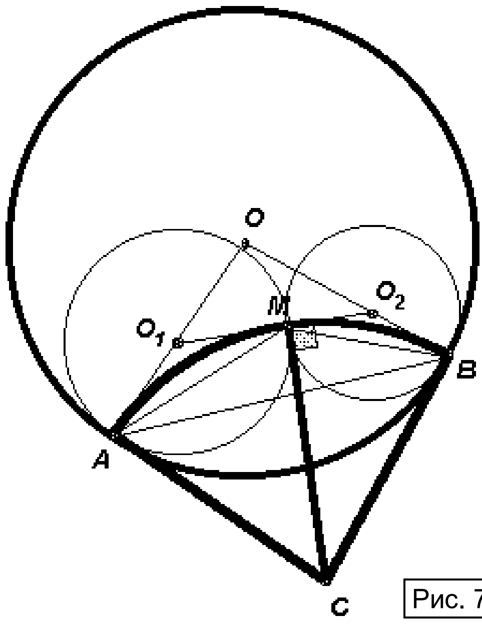


Рис. 7в

Пусть теперь имеются три окружности, попарно касающиеся друг друга (внутренним или внешним образом). Из доказанной леммы следует, что точка пересечения любых двух общих касательных (проведенных через общие точки касания) также будет принадлежать и третьей касательной, то есть все три общие касательные пересекаются в одной точке.

Теперь решим данную задачу.

1) Рассмотрим какую-нибудь точку *M*, принадлежащую искомому ГМТ (см. рис. 7б). Проведем общие касательные к окружностям в точках *A* и *B*, и отметим точку *C* их пересечения. Через эту же точку пройдет и касательная, проведенная из точки *M.* Так как $CA = CB = CM$, то *M* – внутренняя точка дуги *AB* окружности с центром *C* и радиусом *CA*.
2) Рассмотрим какую-нибудь внутреннюю точку *M* указанной дуги (см. рис. 7в). Проведем через точку *M* отрезок, перпендикулярный *CM* до пересечения с радиусами *OA* и *OB* большей окружности в точках O_1 и O_2 соответственно. Очевидно, что эти пересечения и будут являться центрами двух окружностей, касающихся друг друга в точке *M*, и исходной – в точках *A* и *B.*

Доказать, что искомое ГМТ является дугой некоторой окружности, можно и другим способом. Пусть $\angle AOB = \alpha$, *тогда* $\angle AMB = 180^\circ - (\angle AMO_1 + \angle BMO_2) = (90^\circ - \angle AMO_1) + (90^\circ - \angle BMO_2) = \frac{1}{2}\angle AO_1M + \frac{1}{2}\angle BO_2M = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle OO_1O_2) + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle OO_2O_1) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle OO_1O_2 + \angle OO_2O_1) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ *(см. рис. 7в). Найденный угол AMB не зависит от выбора окружностей, поэтому, точка M принадлежит ГМТ, из которых отрезок AB виден под углом* $\varphi = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$.

5.3. (***9 баллов***) Возможна ли такая компания, в которой у каждого ровно 10 друзей, а у любых двух – ровно 4 общих друга?

Ответ: нет, невозможна.

Пусть такая компания возможна и состоит из *n* человек. Тогда в ней имеется $\frac{n(n-1)}{2}$ пар, у каждой из которых список общих друзей состоит из 4 человек. Если записать эти списки подряд, то получим список, в котором $2n(n-1)$ позиций. При этом каждый участник компании является общим другом для каждой пары своих друзей (всего таких пар – $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$) и ни для какой другой пары. Поэтому он упомянут в списке 45 раз, и всего в списке $45n$ позиций. Таким образом, должно выполняться равенство $2n(n-1) = 45n$, что невозможно ни при каких натуральных значениях *n*.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА 9 КЛАССОВ 14.10.2006

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Найдите все значения x, для которых $\sqrt{9-4x^2} \neq 0$.

Ответ: (–1,5; 1,5).

Значение данного квадратного корня отлично от нуля, если это выражение имеет смысл и подкоренное выражение не равно нулю, то есть если $9 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1,5 \Leftrightarrow -1,5 < x < 1,5$.

1.2. В треугольник ABC с прямым углом C и углом B, равным 30°, вписана окружность радиуса 1. Найдите расстояние от вершины A до точки касания окружности со стороной BC.

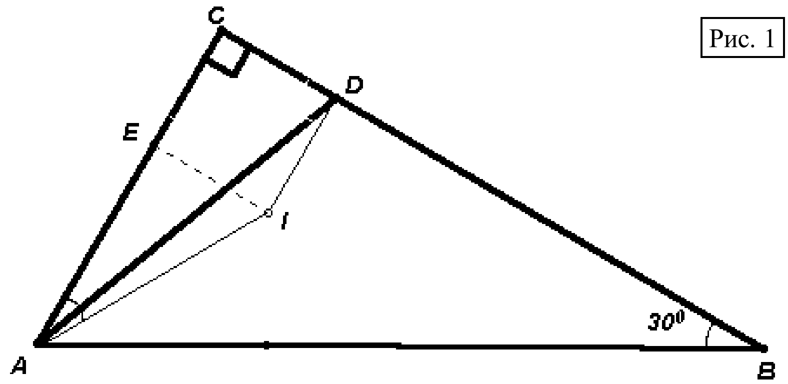


Рис. 1

Ответ: $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

Пусть I – центр вписанной окружности, D и E – точки касания этой окружности с катетами BC и AC соответственно (см. рис. 1). Четырехугольник $IECD$ – квадрат, так как все его углы прямые и $ID = IE$. Поэтому $CD = CE = r = 1$.

Первый способ. Проведем отрезок AI. В треугольнике AEI угол E – прямой, а $\angle EAI = 30°$ (так как AI – биссектриса угла CAB, равного 60°). Тогда $AE = \dfrac{r}{tg30^\circ} = \sqrt{3}$; $AC = AE + r = \sqrt{3} + 1$. Из прямоугольного треугольника ACD: $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 5 + 2\sqrt{3}$.

Второй способ. Из равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности, можно вывести формулу $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, справедливую для любого прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c.

В нашем случае: пусть $AC = b$, тогда $BC = \dfrac{b}{tg30^\circ} = b\sqrt{3}$; $AB = 2b$. Подставив эти выражения в указанное выше равенство, получим уравнение: $\dfrac{b\sqrt{3}+b-2b}{2} = 1$. Следовательно, $b = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$. Из прямоугольного треугольника ACD: $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 5 + 2\sqrt{3}$.

1.3. Сколько натуральных чисел вида $3^n + 1$, где n – натуральное число, являются точными квадратами?

Ответ: одно.

Пусть $3^n + 1 = m^2$, где m – натуральное число. Тогда $3^n = (m-1)(m+1)$. Множители правой части отличаются на 2 и являются степенями тройки. Это возможно только в одном случае: если они равны 1 и 3 соответственно, то есть $m = 2$. Следовательно, условие задачи выполняется только при $n = 1$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Найдите все такие a и b, что уравнения $x^2 + ax + b^2 = 0$ и $x^2 + bx + a^2 = 0$ имеют общий корень.

Ответ: $a = b = 0$.

Пусть a и b – искомые числа, x – общий корень данных уравнений. Тогда оба уравнения становятся верными равенствами. Вычитая из первого равенства второе, получим: $(a – b)x + (b – a)(b + a) = 0 \Leftrightarrow (a – b)(x – a – b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ или $x = a + b$.
1) Если $a = b$, то надо найти все такие a, при которых уравнение $x^2 + ax + a^2 = 0$ имеет корни. Поскольку $D = a^2 – 4a^2 = –3a^2 \le 0$, то уравнение имеет корни только при $a = 0$.
2) Если $x = a + b$, то подставив это значение в любое из уравнений, получим, что $2a^2 + 3ab + 2b^2 = 0$. Решая это квадратное уравнение относительно переменной a, получим: $D = 9b^2 – 16b^2 = –7b^2 \le 0$, поэтому полученное равенство выполняется только при $a = b = 0$.

2.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 60°$, $\angle B = 150°$, $\angle C = 45°$ и $AB = BC$. Докажите, что треугольник ABD – равносторонний.

В данном четырехугольнике $\angle D = 360° – (\angle A + \angle B + \angle C) = 105°$. Рассмотрим окружность с центром B и радиусом BA, проходящую также через точку C (см. рис. 2). Так как $\angle ADC + \frac{1}{2}\angle ABC = 180°$, то эта окружность проходит через точку D. Тогда треугольник ABD – равнобедренный с углом 60°, то есть ABD – равносторонний.

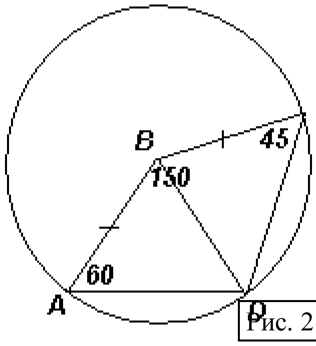


Рис. 2

2.3. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $2n$ является квадратом натурального числа, а $3n$ – кубом.

Ответ: 72.

Так как $2n$ – квадрат натурального числа, то в его разложение на простые множители 2 входит с четным показателем степени. Следовательно, n – четное число. Так как $3n$ – куб натурального числа, то в его разложение на простые множители как число 2, так и число 3 входят с показателем степени, кратным трем. Поэтому в разложении числа $3n$ должно быть не менее трех двоек и двух троек, то есть $n \ge 8·9 = 72$. Это число удовлетворяет условию задачи: $2n = 144 = 12^2$; $3n = 216 = 6^3$.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был в 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

Ответ: 2 км.

Первый способ («физический»). Будем считать, что пешеход неподвижен. Мотоциклист вначале отставал от пешехода на 6 км, а потом обогнал его на 3 км, а велосипедист вначале находился вровень с пешеходом, а затем обогнал его на 3 км. Следовательно, скорость мотоциклиста *относительно пешехода* в 3 раза больше скорости велосипедиста *относительно пешехода*.

Так как мотоциклист, догнав пешехода, проехал *относительно пешехода* 6 км, то велосипедист проехал *относительно пешехода* в три раза меньше, то есть 2 км.

Второй способ («алгебраический»). Пусть скорости мотоциклиста, велосипедиста и пешехода равны соответственно a км/ч, b км/ч и c км/ч. Пусть также с момента «встречи» пешехода и велосипедиста до момента «встречи» мотоциклиста и велосипедиста прошло t часов, а с момента «встречи» пешехода и велосипедиста до момента «встречи» пешехода и мотоциклиста прошло T часов. Тогда составляем три уравнения: $(a – c)t = 9$; $(b – c)t = 3$; $(a – c)T = 6$. Найдем искомое расстояние $S = (b – c)T$. Разделив первое уравнение на второе, получим, что $\frac{a-c}{b-c} = 3$. Тогда $\frac{(a-c)T}{(b-c)T} = 3$, то есть $\frac{6}{S} = 3$, $S = 2$.

Третий способ («геометрический»). Изобразим графики зависимости перемещения S от времени t для всех участников процесса в одной системе координат (см. рис. 3, лучи OA, OC и MA – графики движения велосипедиста, пешехода и мотоциклиста соответственно). Из условия задачи следует, что $OM = 6$; $AC = 3$.

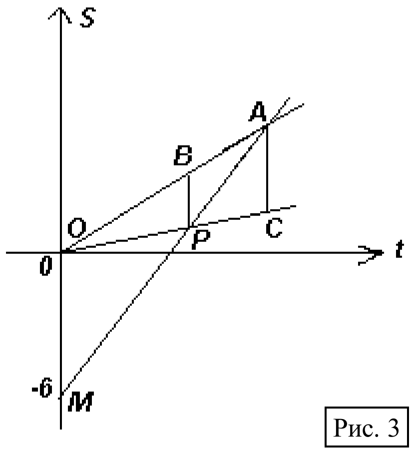
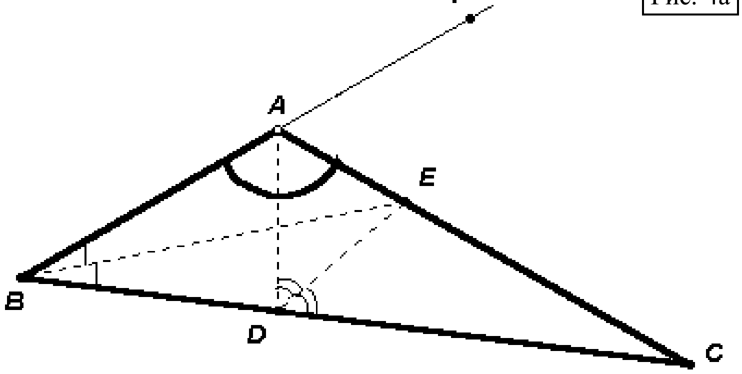


Рис. 3

Для того, чтобы найти искомое расстояние BP, рассмотрим две пары подобных треугольников: $\Delta ABP \sim \Delta AOM$, $\Delta OBP \sim \Delta OAC$. Из первого подобия следует, что $\frac{BP}{OM} = \frac{AB}{AO}$, а из второго, что $\frac{BP}{AC} = \frac{BO}{AO}$. Следовательно, $\frac{BP}{OM} + \frac{BP}{AC} = \frac{AB + BO}{AO} = \frac{AO}{AO} = 1$. Тогда $BP = \frac{OM \cdot AC}{OM + AC} = 2$.

3.2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.

Рис. 4а



Ответ: 120°.

Первый способ. Рассмотрим треугольник ABD, в котором BE – биссектриса внутреннего угла, а DE – биссектриса внешнего угла ADC (см. рис. 4а). Точка E их пересечения равноудалена от сторон треугольника, поэтому является центром вневписанной окружности (окружности, касающейся стороны AD и продолжений сторон BA и BD). Следовательно, AE – биссектриса внешнего угла DAF этого треугольника. Таким образом, $\angle FAE = \angle EAD = \angle DAB = 60°$, поэтому $\angle BAC = 120°$.

Второй способ. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC}$. Следовательно, точки B, E и D принадлежат геометрическому месту точек, отношение расстояний до которых от точек A и C постоянно. Этим геометрическим местом является окружность Аполлония, центр которой лежит на продолжении стороны AC данного треугольника (см. рис. 4б). Рассмотрим EF – диаметр окружности, тогда $\angle EDF = 90°$.

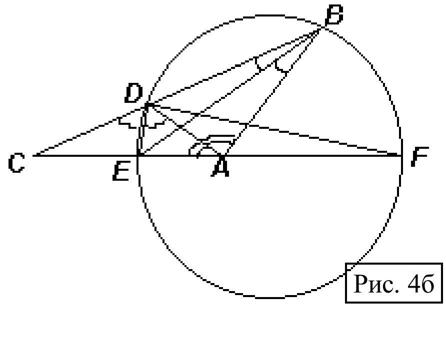


Рис. 4б

Так как DE – биссектриса угла ADC, то DF – биссектриса угла ADB. Пусть $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$, $\angle ABE = \angle CBE = \beta$, $\angle ADF = \angle BDF = \gamma = \angle BDF$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Составим систему уравнений, используя сумму углов треугольников ABD и ABE: $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 180 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 180 \end{cases}$. Выразив $\beta + \gamma$ из одного уравнения и подставив в другое, получим, что $\alpha = 60°$, то есть $\angle BAC = 120°$.

3.3. На острове есть сеть железнодорожных линий, по которой можно проехать с любой станции на любую. Известно, что среди всех станций есть ровно 20 узловых (в каждую из которых сходятся не менее трех линий) и ровно 21 тупиковая. Докажите, что в сети есть кольцевая линия.

Для решения задачи достаточно показать, что если кольцевой линии нет, то разность между количествами тупиковых и узловых станций не меньше двух.

Первый способ. Предположим, что в сети нет «кольца». Рассмотрим одну из тупиковых станций и перегон, ведущий к ней. Если их удалить, то предыдущая станция либо сама станет «тупиком» (если она была «проходной»), либо, если она была «узлом», то станет «проходной» или останется «узлом». В первом случае количества «тупиков» и «узлов» не изменятся, значит, не изменится и их разность. Во втором случае количество «тупиков» уменьшится на один, а количество «узлов» либо не изменится, либо уменьшится на один, поэтому разность между количествами «тупиков» и «узлов» не увеличится. Повторяя эту процедуру, в конце концов мы получим один перегон с двумя «тупиками» на концах. Поэтому изначально в данной сети разность между количествами тупиковых и узловых станций не меньше двух.

Второй способ. Пусть t, p и u – количества тупиковых, «проходных» и узловых станций соответственно. К «тупикам» примыкают t перегонов, к «проходным» станциям – $2p$ перегонов, а к «узлам» – не меньше, чем $3u$ перегонов. Так как каждый перегон подсчитан дважды, то общее количество N перегонов железнодорожной сети таково, что $2N \geq t + 2p + 3u$. С другой стороны, при отсутствии в сети кольцевых линий, $N = t + p + u - 1$.

Упростив неравенство $2(t + p + u - 1) \geq t + 2p + 3u$, получим, что $t - u \geq 2$, что и требовалось.

Отметим, что утверждение задачи останется верным даже в случае, когда не с любой станции можно проехать на любую.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Положительные числа x, y и z удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$. Докажите, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq x+y+z$.

Первый способ. Заметим, что при $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, доказываемое неравенство равносильно тому, что $xy + yz + zx \geq xyz(x + y + z)$.

1) При любых x, y и z выполняется неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, поэтому из неравенства $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ следует неравенство $xy + yz + zx \leq 3$, а из него, в свою очередь, для положительных x, y и z, следует, что $(xy + yz + zx)^2 \leq 3(xy + yz + zx)$.

2) При любых a, b и c выполняется неравенство $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$. Введя обозначения $xy = a$, $yz = b$ и $zx = c$, получим: $(xy + yz + zx)^2 \geq 3(xy^2z + xyz^2 + x^2yz) = 3xyz(x + y + z)$.

Из неравенств, полученных в пунктах 1) и 2), следует, что $xy+yz+zx \geq \frac{(xy+yz+zx)^2}{3} \geq xyz(x+y+z)$, что и требовалось.

Второй способ. При решении задачи используем следующее утверждение: если $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ и $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3$, то $3(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) \leq (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$. Для его доказательства можно рассмотреть, например, разность между правой и левой частями, которая равна: $a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_3b_3 - 2a_1b_3 - 2a_2b_2 - 2a_3b_1 = a_1(b_1 - b_3) + a_1(b_2 - b_3) + a_2(b_1 - b_2) + a_2(b_3 - b_2) + a_3(b_2 - b_1) + a_3(b_3 - b_1) = (b_3 - b_1)(a_3 - a_1) + (b_2 - b_1)(a_3 - a_2) + (b_3 - b_2)(a_2 - a_1) \geq 0$, так как в каждой скобке – неотрицательное число.

Пусть $a_1 = x^2$; $a_2 = y^2$; $a_3 = z^2$; $b_1 = \frac{1}{z}$; $b_2 = \frac{1}{y}$; $b_3 = \frac{1}{x}$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < x \leq y \leq z$, тогда $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} > 0$, то есть эти числа удовлетворяют условию доказанного неравенства.

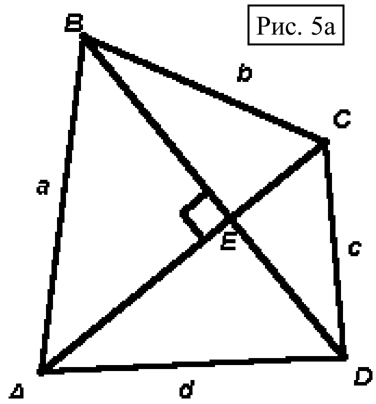
Используя, кроме него, условие задачи, получим, что $3\left(x^2 \cdot \frac{1}{x} + y^2 \cdot \frac{1}{y} + z^2 \cdot \frac{1}{z}\right) \leq \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leq 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, откуда и следует, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq x+y+z$.

Отметим, что наряду с утверждением, использованным при доказательстве вторым способом, справедливо и другое: если $0 \le a_1 \le a_2 \le a_3$ и $0 \le b_1 \le b_2 \le b_3$, то $3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \ge (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$. Эти неравенства называются неравенствами Чебышева, доказываются аналогичным образом и обобщаются для двух упорядоченных наборов из n чисел.

4.2. Вася вырезал из бумаги выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, у которого длины последовательных сторон равны a, b, c и d. Петя тоже вырезал выпуклый четырехугольник с такими же длинами последовательных сторон. Могут ли диагонали Петиного четырехугольника оказаться не перпендикулярными?

Ответ: нет, не могут.

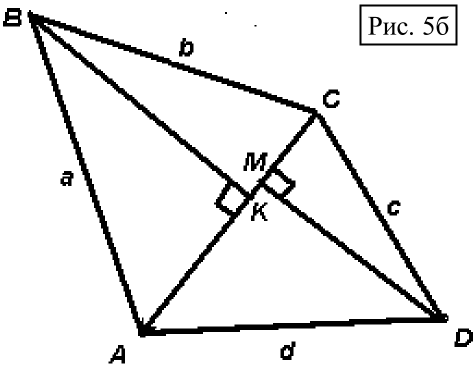
Рис. 5а



Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали перпендикулярны, E – точка их пересечения (см. рис. 5а). Применяя теорему Пифагора в каждом из четырех прямоугольных треугольников, получим, что $a^2 + c^2 = AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 = b^2 + d^2$. Следовательно, $a^2 - b^2 = d^2 - c^2$.

Так как длины последовательных сторон четырехугольников, вырезанных Васей и Петей, одинаковы, то полученное равенство должно выполняться в обоих четырехугольниках.

Рис. 5б



Пусть диагонали Петиного четырехугольника не перпендикулярны (см. рис. 5б). Проведем перпендикуляры BK и DM к диагонали AC. Тогда $a^2 - b^2 = AK^2 - CK^2 = (AK + CK)(AK - CK) = AC(AK - CK)$ и $d^2 - c^2 = AM^2 - CM^2 = (AM + CM)(AM - CM) = AC(AM - CM)$. Таким образом получим, что $AK - CK = AM - CM \Leftrightarrow AK + CM = AM + CK$. Это равенство выполняется только в случае, если точки K и M совпадают, то есть диагонали AC и BD этого четырехугольника также перпендикулярны.

Отметим, что в процессе решения задачи было доказано следующее утверждение: диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противолежащих сторон. Доказательство этого утверждения для случая, когда данный четырехугольник – не выпуклый, проводится аналогично. Во второй части доказательства можно также использовать теорему косинусов.

4.3. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существуют две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково наименьшее количество хороших пар?

Ответ: 22.

Нарисуем на листе путь из горизонтальных и вертикальных звеньев, проходящий через все клетки по одному разу. (Например, начнем с левой верхней клетки, пройдем верхнюю строку, спустимся на одну клетку, пройдем вторую строку справа налево, спустимся еще на одну клетку и так далее.) Пройдем по этому пути, нумеруя цвета в порядке их появления в первый раз. Когда нам впервые встречается k - й цвет ($k > 1$), мы проходим через хорошую пару цветов (предыдущая клетка окрашена в другой цвет). Эта пара еще не появлялась, поскольку еще не появлялся k - й цвет. Значит, нам встретится не менее, чем $23 - 1 = 22$ различных хороших пар цветов.

Пример, когда хороших пар ровно 22: на тетрадном листе не менее 23 строк; покрасим первую строку в первый цвет, вторую – во второй и так далее, двадцать третью строку и все последующие, если они есть, покрасим в двадцать третий цвет.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Известно, что $\dfrac{1}{a+b+c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Какие значения может принимать выражение $(a + b)(b + c)(c + a)$?

Ответ: 0.

Преобразуем исходное равенство: $\dfrac{1}{a+b+c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+b+c}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \Leftrightarrow$ $-\dfrac{b+c}{(a+b+c)a}=\dfrac{b+c}{bc} \Leftrightarrow \dfrac{(b+c)\left(a^2+ab+ac+bc\right)}{(a+b+c)abc}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(b+c)(a+b)(c+a)}{(a+b+c)abc}=0$.

Следовательно, $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$.

5.2. Сумма расстояний между серединами противолежащих сторон четырехугольника равна его полупериметру. Верно ли, что этот четырехугольник – параллелограмм?

Ответ: да, верно.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Пусть E – середина AD, F – середина BC (см. рис. 6). Тогда $\overline{EF}=\overline{EA}+\overline{AB}+\overline{BF}$ и $\overline{EF}=\overline{ED}+\overline{DC}+\overline{CF}$. Сложив эти равенства, и используя, что $\overline{EA}=-\overline{ED}$ и $\overline{FB}=-\overline{FC}$, получим: $\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{DC}\right)$.

Аналогично, если точки G и H – середины сторон CD и AB соответственно, то $\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{CB}+\overline{DA}\right)$.

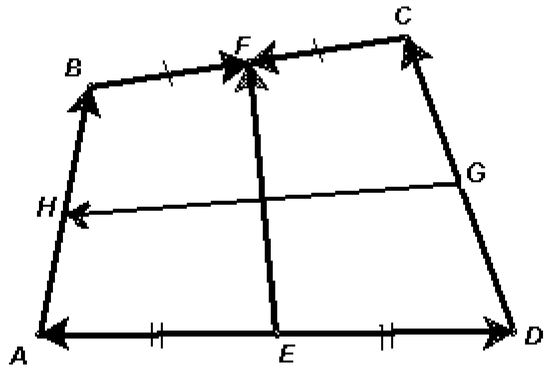


Рис. 6

Для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ справедливо неравенство: $\left|\overline{x}+\overline{y}\right|\le\left|\overline{x}\right|+\left|\overline{y}\right|$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ сонаправлены. Применяя это, получим, что $\left|\overline{EF}\right|\le\dfrac{1}{2}\left(\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{DC}\right|\right)$ и $\left|\overline{GH}\right|\le\dfrac{1}{2}\left(\left|\overline{CB}\right|+\left|\overline{DA}\right|\right)$. Таким образом, $\left|\overline{EF}\right|+\left|\overline{GH}\right|\le\dfrac{1}{2}\left(\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{BC}\right|+\left|\overline{CD}\right|+\left|DA\right|\right)$, причем равенство, заданное в условии задачи, достигается т. и т. т., когда $\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{DC}$ и $\overline{CB}\uparrow\uparrow\overline{DA}$. Это и означает, что $ABCD$ – параллелограмм.

5.3. Набор из 100 чисел таков, что ровно 2006 попарных произведений отрицательны. Сколько нулей в этом наборе?

Ответ: 7.

Пусть в данном наборе x положительных чисел и y отрицательных. Тогда $xy = 2006$. Разложение 2006 на простые множители имеет вид: $2006 = 2\cdot17\cdot59$. Так как каждое из чисел x и y меньше ста, то одно из них равно 59, а другое – 34. Следовательно, количество нулей в наборе составляет $100 – 59 – 34 = 7$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА 9 КЛАССОВ 13.10.2007

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Про коэффициенты линейной функции $y = kx + b$ известно, что $k + b > 0$, а $2k + b < 0$. Может ли график этой функции пересекать ось абсцисс в точке $x = 3$?

Ответ: нет, не может.

Первый способ. Графиком линейной функции является прямая, которая либо совпадает с осью x, либо имеет с ней не более одной общей точки.

Из условия следует, что $k + b = y(1) > 0$, а $2k + b = y(2) < 0$, то есть график пересекает ось абсцисс в точке $x_0 \in (1; 2)$ (см. рис. 1).

Второй способ. Пусть (3; 0) – точка пересечения графика с осью абсцисс. Тогда выполняется равенство $3k + b = 0$. Так как $3k + b = 2k + (k + b) = k + (2k + b)$, то из условия $k + b > 0$ следует, что $2k < 0$, а из условия $2k + b < 0$ следует, что $k > 0$.

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно.

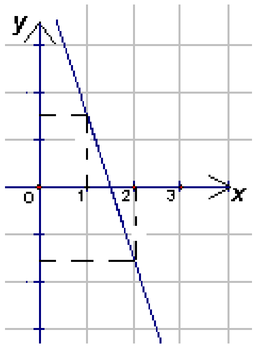


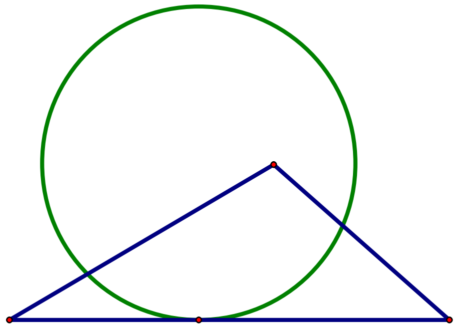
Рис. 1

1.2. Каждая сторона треугольника имеет с окружностью ровно одну общую точку, отличную от вершины. Обязательно ли эта окружность – вписанная?

Ответ: нет, не обязательно.

Например, см. рис. 2.

Рис. 2

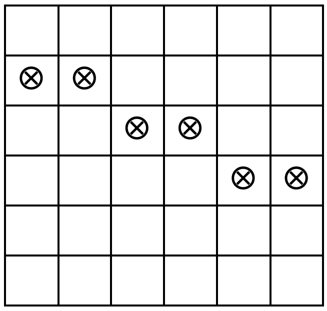


1.3. Можно ли на некоторые клетки доски 6×6 положить по камешку так, чтобы количество камешков в каждой горизонтали было четно, а количество камешков в каждой вертикали – нечетно?

Ответ: да, можно.

Например, см. рис. 3. В каждом столбце доски – по одному камешку, а в каждой строке – либо 2 камешка, либо 0.

Рис. 3



Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Сократите дробь $\dfrac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}$, если известно, что $a^2+b^2=(a+b-c)^2$.

Ответ: $\dfrac{a-c}{b-c}$.

Первый способ. Из условия следует, что $a^2=(a+b-c)^2-b^2=(a-c)(a+2b-c)$, $b^2=(a+b-c)^2-a^2=(b-c)(2a+b-c)$.

Тогда: $\dfrac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\dfrac{(a-c)(a+2b-c)+(a-c)^2}{(b-c)(2a+b-c)+(b-c)^2}=\dfrac{(a-c)(2a+2b-2c)}{(b-c)(2a+2b-2c)}=\dfrac{a-c}{b-c}$.

<u>Второй способ</u>. Для того, чтобы дважды получить выражение a^2+b^2, в числителе дроби прибавим и вычтем b^2, а в знаменателе дроби – a^2:

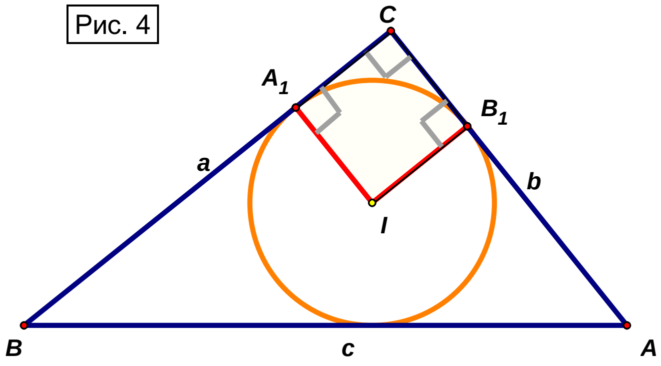
$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a^2+b^2+(a-c)^2-b^2}{b^2+a^2+(b-c)^2-a^2}=\frac{(a+b-c)^2+(a-c+b)(a-c-b)}{(a+b-c)^2+(b-c+a)(b-c-a)}==\frac{(a+b-c)(2a-2c)}{(a+b-c)(2b-2c)}=\frac{a-c}{b-c}.$$

2.2. В прямоугольном треугольнике отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно 2 : 5. Найдите отношение катетов.

<u>Ответ</u>: 3 : 4.

Пусть в прямоугольном треугольнике больший катет равен *a*, меньший катет – *b*, гипотенуза равна *c*. Тогда радиус *R* описанной окружности равен $\frac{c}{2}$, а радиус *r* вписанной окружности равен $\frac{a+b-c}{2}$. Воспользовавшись условием задачи и теоремой Пифагора, составим систему уравнений: $\begin{cases}\frac{a+b-c}{c}=\frac{2}{5}\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$.

Рис. 4



Обозначим: $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$ ($x>y$). Тогда $\begin{cases}x+y=\frac{7}{5}\\ x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{7}{5}\\ (x+y)^2-2xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\frac{7}{5}\\ xy=\frac{12}{25}\end{cases}$.

По теореме, обратной теореме Виета, числа *x* и *y* являются корнями квадратного уравнения $t^2-\frac{7}{5}t+\frac{12}{25}=0$. Решив его, получим, что $t=\frac{4}{5}$ или $t=\frac{3}{5}$. Следовательно, $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$, то есть данный треугольник – египетский.

Формулу $r=\frac{a+b-c}{2}$, использованную в решении задачи, можно получить, например, так. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть I – центр его вписанной окружности, A_1 и B_1 – точки ее касания с катетами BC и AC (см. рис. 4). Тогда IA_1CB_1 – квадрат, $BA_1=a-r$, $AB_1=b-r$. Из равенства касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что $BA_1+AB_1=c$.

2.3. В клетки таблицы 3×3 расставлены все цифры от 1 до 9 и подсчитана сумма чисел в каждой строке. Какое наибольшее количество таких сумм могло быть точными квадратами?

<u>Ответ</u>: две суммы.

1	2	6	9
3	4	9	16
5	7	8	20

В виде сумм трех цифр от 1 до 9 можно представить только два точных квадрата: 9 и 16, так как 4 < 1 + 2 + 3, а 25 > 7 + 8 + 9. Значит, три суммы в строках могут оказаться точными квадратами только тогда, когда одно из чисел 9 или 16 повторится хотя бы дважды. Это невозможно, так как сумма всех цифр от 1 до 9 равна 45, но 9 + 9 + 16 < 9 + 16 + 16 < 45, а 16 + 16 + 16 > 45.

Один из возможных примеров двух сумм, являющихся точными квадратами, показан в таблице.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Представьте многочлен $3x^4+1$ в виде суммы квадратов трех многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами.

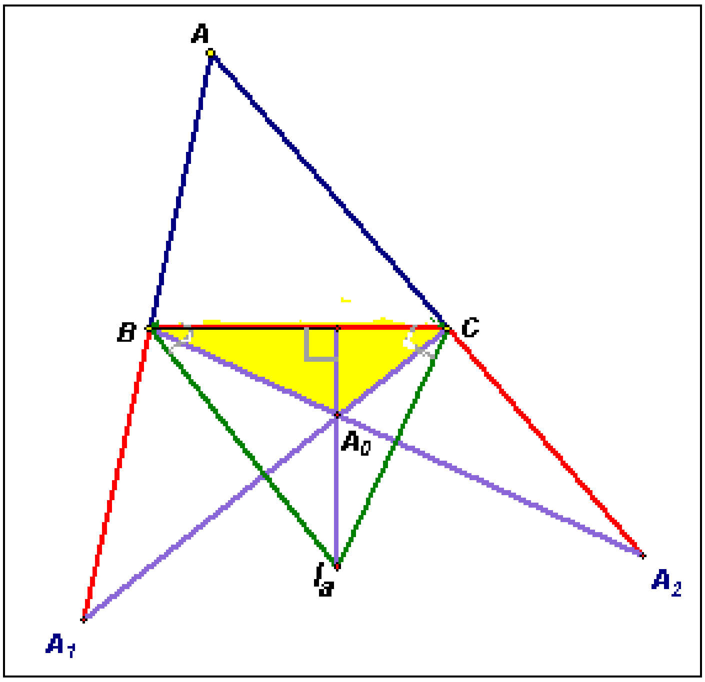
<u>Ответ</u>: например, $3x^4+1=(x^2+x)^2+(x^2-x)^2+(x^2-1)^2$.

Можно доказать, что такое представление – единственное (с точностью до замены любого из многочленов на ему противоположный).

Действительно, пусть $3x^4 + 1 = P^2(x) + Q^2(x) + R^2(x)$, где P, Q и R – многочлены с целыми коэффициентами. Тогда каждый из них должен иметь вторую степень, причем коэффициент при x^2 у каждого многочлена должен быть равен ±1. Кроме того, только один из этих многочленов может иметь свободный член, отличный от нуля, который должен быть равен ±1.

Таким образом, $P(x) = \pm x^2 + ax$; $Q(x) = \pm x^2 + bx$; $R(x) = \pm x^2 + cx \pm 1$. Тогда $P^2(x) + Q^2(x) + R^2(x) = 3x^4 \pm 2(a \pm b \pm c)x^3 + (a^2 + b^2 + c^2 \pm 2)x^2 \pm 2cx + 1$. Следовательно, $\begin{cases} a \pm b \pm c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 \pm 2 = 0 \\ c = 0 \end{cases}$. *Учитывая, что a и b – целые числа, получим: $c = 0$; $a = \pm1$; $b = \pm1$.*

При этом в левой части второго равенства должно стоять число –2, а это означает, что $R(x) = \pm(x^2 - 1)$; $P(x) = \pm(x^2 + x)$; $Q(x) = \pm(x^2 - x)$, что и требовалось доказать.



3.2. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 – точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC. (*Напомним, что вневписанной называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон*.)

Пусть I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC (см. рис. 5 а, б).

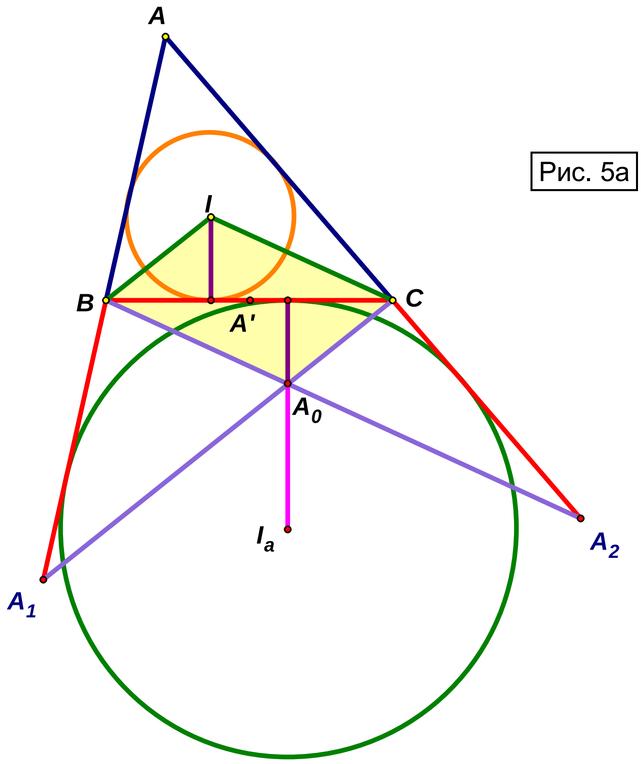


Рис. 5а

<u>Первый способ</u>. BI_a и CI_a – биссектрисы внешних углов B и C данного треугольника. По условию, треугольники A_1BC и A_2CB – равнобедренные, поэтому $BI_a \perp A_1C$ и $CI_a \perp A_2B$ (см. рис. 5а). Следовательно, I_a – точка пересечения двух высот треугольника A_0BC, значит третья высота этого треугольника лежит на прямой A_0I_a, то есть $A_0I_a \perp BC$, что и требовалось доказать.

<u>Второй способ</u>. Так как треугольник A_1BC – равнобедренный, то $\angle BA_1C = \dfrac{180^0 - (180^0 - \angle B)}{2} = \dfrac{\angle B}{2}$, то есть отрезок A_1C параллелен биссектрисе BI (см. рис. 5б). Аналогично, отрезок A_2B параллелен биссектрисе CI. Следовательно, четырехугольник A_0BIC является

параллелограммом.

Поэтому основания перпендикуляров, опущенных из точек I и A_0 на отрезок BC, равноудалены от его середины – точки A'. Этим же свойством обладают точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC, поэтому радиус вневписанной окружности лежит на прямой, проходящей через точку A_0 перпендикулярно к BC. Рис. 5б

Следовательно, эта прямая содержит центр I_a вневписанной окружности.

3.3. Можно ли числа 1, 2, ..., 20 расставить в вершинах и серединах ребер куба так, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось среднему арифметическому чисел, стоящих на концах этого ребра?

Ответ: нет, нельзя.

Числа, стоящие на концах каждого ребра, должны быть одинаковой четности, иначе их среднее арифметическое не будет целым. Значит, числа, стоящие в вершинах куба, либо все четные, либо все нечетные. Тогда, хотя бы одно из чисел 1 или 20 (наименьшее или наибольшее) должно стоять в середине какого-то ребра. Но, если $a \le b$, то $a \le \frac{a+b}{2} \le b$, то есть числа 1 и 20 не могут являться средними арифметическими никаких двух из данных чисел. Следовательно, требуемая расстановка невозможна.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Найдите все положительные решения уравнения $x(x + 1)^2 + y(y + 1)^2 = 8xy$.

Ответ: (1; 1).

Первый способ. В левой части уравнения прибавим и вычтем выражение $4x^2 + 4y^2$. Получим: $x(x + 1)^2 - 4x^2 + y(y + 1)^2 - 4y^2 + 4x^2 + 4y^2 - 8xy = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 1) - 4x^2 + y(y^2 + 2y + 1) - 4y^2 + 4(x^2 + y^2 - 2xy) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) + y(y^2 - 2y + 1) + 4(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)^2 + y(y - 1)^2 + 4(x - y)^2 = 0$.

Так как x и y – положительные числа, то каждое из слагаемых, полученных в левой части уравнения, неотрицательно. Их сумма равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, то есть, если $x = y = 1$.

Второй способ. Для любых x и y выполняются неравенства: $(x + 1)^2 \ge 4x$ и $(y + 1)^2 \ge 4y$. Тогда, при $x > 0$ и $y > 0$ $x(x + 1)^2 + y(y + 1)^2 \ge 4x^2 + 4y^2 \ge 8xy$, так как $x^2 + y^2 \ge 2xy$. Равенство достигается т. и т. т., когда $x = y = 1$.

Третий способ. Учитывая, что $x > 0$ и $y > 0$, разделим обе части уравнения на выражение $2xy$. Получим: $\frac{(x+1)^2}{2y} + \frac{(y+1)^2}{2x} = 4$.

Оценим левую часть полученного уравнения, используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, а также неравенство о сумме двух взаимно обратных чисел: $\frac{(x+1)^2}{2y} + \frac{(y+1)^2}{2x} \ge \sqrt{\frac{(x+1)^2(y+1)^2}{xy}} = \frac{(x+1)(y+1)}{\sqrt{xy}} = \frac{xy+x+y+1}{\sqrt{xy}} =$

$= \left(\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}\right) + \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)$ $\geq 2 + 2 = 4$. Равенство возможно т. и т. т., когда $x = y = 1$.

4.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Через вершины A, B и C проходят прямые, перпендикулярные отрезкам B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

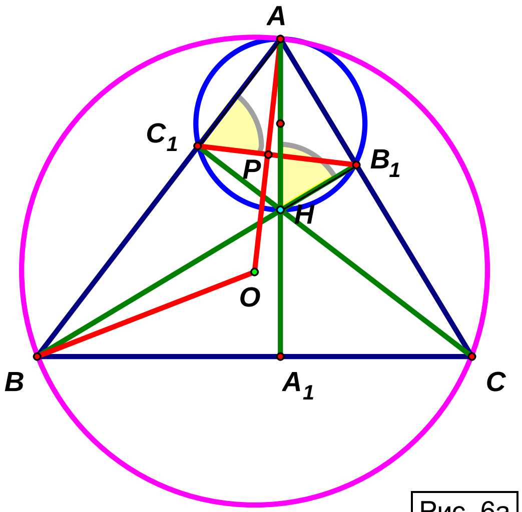


Рис. 6а

Докажем, что эти прямые будут пересекаться в центре O окружности, описанной около треугольника ABC (см. рис. 6 а, б). Пусть H – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC.

Первый способ. Треугольник BOA – равнобедренный, $\angle BOA = 2\angle BCA$, поэтому, $\angle BAO = \frac{180^0 - \angle BOA}{2} = \frac{180^0 - 2\angle C}{2} = 90^0 - \angle C$ (см. рис. 6а).

Из условия следует, что $\angle HC_1A = \angle HB_1A = 90°$, поэтому четырехугольник AC_1HB_1 – вписанный. Следовательно, $\angle AC_1B_1 = \angle AHB_1 = 90° - \angle A_1AC = \angle C$. Таким образом, в треугольнике AC_1P (P – точка пересечения прямых AO и B_1C_1) сумма двух углов равна 90°, то есть $AO \perp B_1C_1$. Аналогично доказывается, что $BO \perp C_1A_1$ и $CO \perp A_1B_1$.

Равенство углов AC_1B_1 и ACB можно получить иначе, например, из того, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны (общий угол A и пропорциональность двух сторон).

Второй способ. Рассмотрим точки A_2, B_2 и C_2, симметричные точке H относительно сторон BC, AC и AB соответственно (см. рис. 6б). Эти точки лежат на окружности, описанной около треугольника ABC. Кроме того, треугольник $A_2B_2C_2$ получается из треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром H и коэффициентом 2, поэтому стороны этих треугольников соответственно параллельны.

Доказав (одним из уже предложенных способов) равенство $\angle BA_1C_1 = \angle BAC = \angle CA_1B_1$ и учитывая, что $AA_1 \perp BC$, получим, что $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$, поэтому точка A является серединой дуги B_2C_2. Следовательно, $OA \perp B_2C_2$, то есть $AO \perp B_1C_1$. Аналогично доказывается, что $BO \perp C_1A_1$ и $CO \perp A_1B_1$.

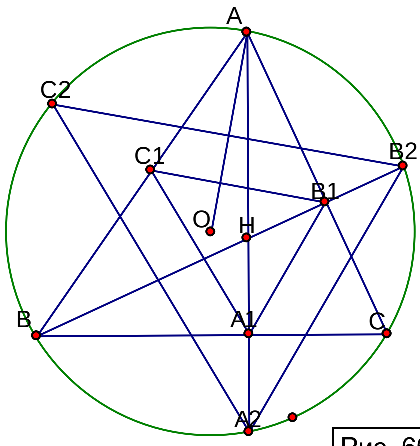


Рис. 6б

*Отметим, что для тупоугольного треугольника утверждение задачи также справедливо. Более того, как следует из первого способа решения, прямые AO и AH образуют равные углы со сторонами AB и AC соответственно. Аналогично, прямые BO и BH образуют равные углы со сторонами BC и BA, а прямые CO и CH – со сторонами CB и CA. Такие точки O и H называют **изогонально сопряженными** относительно треугольника ABC.*

*Общее утверждение формулируется тогда следующим образом. Пусть точки P и Q – изогонально сопряженные относительно треугольника ABC, а треугольник $A_PB_PC_P$ образован основаниями перпендикуляров, опущенных из P на прямые, содержащие стороны треугольника ABC (**педальный треугольник**). Тогда прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с точкой Q, перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника $A_PB_PC_P$.*

4.3. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение трех натуральных чисел, сумма которых равна 407?

Ответ: на шесть нулей.

Например, 250 + 125 + 32 = 407 и $250\cdot125\cdot32 = 5^6\cdot2^6 = 10^6$ = 1000000. Докажем, что больше шести нулей быть не может.

Первый способ. Разложим искомое произведение на простые множители. Если на его конце больше шести нулей, то оно должно содержать множитель 5 не менее, чем в седьмой степени. При этом каждое из трех данных чисел может содержать множитель 5 не более, чем в третьей степени, так как $5^4 = 625 > 407$. Причем, если два слагаемых делятся на 5, то третье слагаемое на 5 не делится, так как их сумма 407 не делится на 5. Таким образом, множитель 5 содержится не более, чем в третьей степени, и не более, чем в двух слагаемых, то есть произведение содержит его не более, чем в шестой степени.

Второй способ. Пусть *a*, *b* и *c* – три данных числа, тогда $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} = \frac{407}{3} < 200$. Следовательно, $abc < 200^3 = 8000000$, то есть произведение не может содержать более шести нулей.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Известно, что $\{x\}\cdot[x] = 100$. Найдите $[x^2] - [x]^2$.

Напомним, что [x] (целая часть x) – наибольшее целое число, не превосходящее x; {x}·(дробная часть x) – разность между числом x и его целой частью.

Ответ: 200.

Так как $x = [x] + \{x\}$, то $[x^2] = [([x] + \{x\})^2] = [[x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2] = [[x]^2 + 200 + \{x\}^2]$. Кроме того, число $[x]^2 + 200$ – целое, а $0 < \{x\}^2 < 1$. Следовательно, $[[x]^2 + 200 + \{x\}^2] = [x]^2 + 200$.

Таким образом, $[x^2] - [x]^2 = 200$.

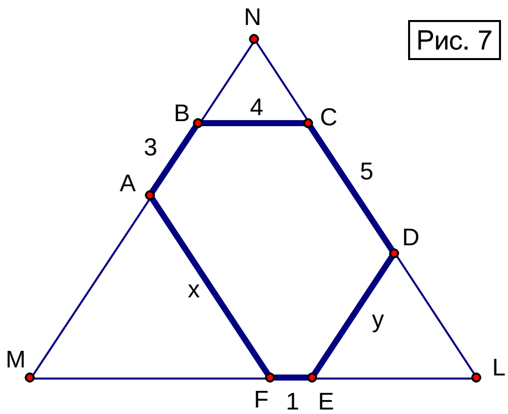
5.2. Каждый угол шестиугольника *ABCDEF* равен 120°. Найдите *DE* и *AF*, если *AB* = 3, *BC* = 4, *CD* = 5 и *EF* = 1.

Ответ: *DE* = 6; *AF* = 8.

Продолжим стороны *AB*, *CD* и *EF* до их попарного пересечения в точках *M*, *N* и *L* (см. рис. 7). Тогда в каждом из треугольников *MAF*, *BNC* и *DLE* есть по два угла, равных 60°, то есть эти треугольники равносторонние. Следовательно, треугольник *MNL* – также равносторонний.

Пусть *AF* = *x*; *DE* = *y*. Тогда *x* + 3 + 4 = 4 + 5 + *y* = *y* + 1 + *x*, откуда *x* = 8, *y* = 6.

Рис. 7



5.3. Среди первых 99 натуральных чисел выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Найдите сумму выбранных чисел.

Ответ: 3725.

Разобьем первые 99 натуральных чисел (кроме числа 50) на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре равнялась 100: (1; 99), (2; 98), ..., (48; 52), (49; 51).

Из условия следует, что из каждой пары могло быть выбрано только одно число, таких пар – 49, поэтому число 50 должно быть выбрано обязательно.

Тогда из последней пары не могло быть выбрано число 49 (иначе 50 + 49 = 99), то есть из нее выбрано число 51. Значит, из предпоследней пары должно было быть выбрано число 52 (иначе 48 + 51 = 99). Аналогичным рассуждением получим, что из предыдущей пары выбрано число 53, и так далее, до числа 99, выбранного из первой пары.

Таким образом, искомый набор чисел восстанавливается однозначно: 50, 51, ..., 99. Сумма чисел в таком наборе равна: $50 + 51 + ... + 99 = (50 + 99) \cdot 25 = 149 \cdot 25 = 3725$.

Математическая регата 9 классов 11.10.2008

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. У девятиклассника – 10 учебных предметов. Его средний балл за четверть равен 4,6. Сколько у него троек, четверок и пятерок, если известно, что присутствуют все эти оценки, а двоек у него нет?

Ответ: одна тройка, две четверки, семь пятерок.

Первый способ. Пусть *a*, *b* и *c* – количество пятерок, четверок и троек соответственно. Тогда: $5a + 4b + 3c = 46$ и $a + b + c = 10$. Решая полученную систему уравнений, получим: $b = 16 - 2a$. Следовательно, *b* – четное число. Учитывая, что $2 \le b \le 8$, осуществляем перебор:

1) Если $b = 8$, то $a = 4$, что противоречит утверждению $a + b + c = 10$.
2) Если $b = 6$, то $a = 5$, что также противоречит утверждению $a + b + c = 10$.
3) Если $b = 4$, то $a = 6$, что также противоречит утверждению $a + b + c = 10$.
4) Если $b = 2$, то $a = 7$, $c = 1$.

Второй способ Сумма всех оценок девятиклассника равна 46. Если бы девятиклассник учился на одни пятерки, то эта сумма была бы равна 50, то есть на 4 балла больше, чем в реальности. Замена оценки «5» на «3» уменьшает общую сумму на 2 балла, а замена «5» на «4» – на 1 балл.

Представим число 4 в виде суммы двоек и единиц: 4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1. Так как все оценки у ученика присутствуют, то возможен только случай 4 = 2 + 1 + 1. Следовательно, возможен единственный набор оценок, который и приведен в ответе.

1.2. Сколько существует различных прямоугольных треугольников, у которых одна из сторон равна 5 см, а одна из высот равна 3 см?

Ответ: три.

В любом прямоугольном треугольнике две высоты совпадают с катетами, а третья высота проведена к гипотенузе.

Рассмотрим возможные варианты.

1) Если гипотенуза равна 5 см, то высотой длины 3 см может являться только один из катетов. Действительно, в прямоугольном треугольнике медиана *m*, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то есть 2,5 см, а высота *h*, проведенная к гипотенузе, не больше этой медианы (см. рис. 1).

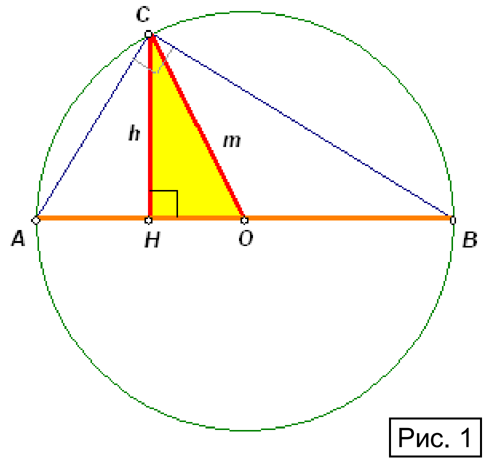


Рис. 1

Треугольник с катетом 3 см и гипотенузой 5 см существует и называется египетским.

2) Если один из катетов равен 5 см, то длину 3 см может иметь как другой катет, так и высота, проведенная к гипотенузе. В обоих случаях треугольники определяются однозначно (по признакам равенства прямоугольных треугольников).

1.3. Может ли сумма $\underbrace{2000\ldots0}_{2008\ нулей}7^2 + \underbrace{2000\ldots0}_{2007\ нулей}8^2$ быть квадратом какого-либо натурального числа?

Ответ: нет, не может.

Число $\underbrace{2000\ldots0}_{2008\ нулей}7^2$ оканчивается цифрой 9, а число $\underbrace{2000\ldots0}_{2007\ нулей}8^2$ оканчивается цифрой 4. Поэтому сумма $\underbrace{2000\ldots0}_{2008\ нулей}7^2 + \underbrace{2000\ldots0}_{2007\ нулей}8^2$ оканчивается цифрой 3. Квадраты натуральных чисел не могут оканчиваться цифрой 3 (*а также цифрами 2, 7 и 8*), что легко проверяется перебором.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Известно, что уравнение $x^4 + a = 0$ (x – переменная, a – некоторое число) имеет два различных корня. Сколько корней имеет уравнение $x^4 + a = x^2$?

Ответ: два корня.

Уравнение $x^4 = -a$ имеет два различных корня тогда и только тогда, когда $a < 0$. В этом случае квадратное уравнение $t^2 - t + a = 0$ имеет два корня, так как $D = 1 - 4a > 0$. Кроме того, из теоремы Виета следует, что знаки этих корней различны. Поэтому уравнение $x^4 + a = x^2$ равносильно уравнению $x^2 = b$, где $b > 0$, которое имеет два корня.

Отметим, что вместо рассуждения о корнях вспомогательного квадратного уравнения можно в одной системе координат рассмотреть графики функций $y = x^2$ и $y = x^4 + a$, где $a < 0$. Эти графики пересекаются в двух точках (симметричных относительно оси ординат).

2.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Найдите угол BDE, если $BC = 2BE$.

Ответ: 30°.

В прямоугольном треугольнике BCE катет равен половине гипотенузы, следовательно, $\angle BCE = 30°$ (см. рис. 2).

Так как $\angle BEC = \angle BDC = 90°$, то четырехугольник $BEDC$ – вписанный (*центр O описанной около него окружности – середина стороны BC*). Углы BDE и BCE – вписанные и опираются на одну и ту же дугу BE, поэтому $\angle BDE = \angle BCE = 30°$.

Доказать равенство углов BDE и BCE можно и по-другому, не используя вспомогательной окружности. Например, из прямоугольных треугольников ADB и AEC следует, что $\cos\angle BAC = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (см. рис. 2). Тогда треугольники ADE и ABC подобны (общий угол и пропорциональность сторон, образующих этот угол). Следовательно, $\angle ADE = \angle ABC$. Тогда $\angle BDE = \angle BCE$, так как они дополняют равные углы до прямых углов.

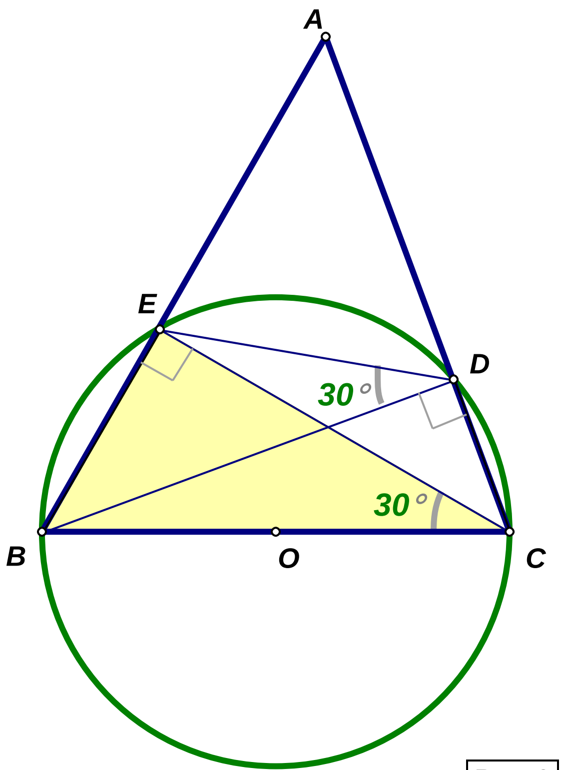


Рис. 2

2.3. Известно, что сумма четырех целых чисел кратна шести. Докажите, что сумма кубов этих чисел также кратна шести.

Заметим, что если n – целое число, то $n^3 - n$ кратно 6. Действительно, $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$, что представляет собой произведение трех последовательных целых чисел, среди которых хотя бы одно число делится на 2 и ровно одно число делится на 3.

Таким образом, разность $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a + b + c + d) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$ кратна 6. По условию сумма целых чисел $a + b + c + d$ кратна 6, Следовательно, сумма их кубов $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ также кратна 6.

Отметим, что первую часть доказательства можно было провести иначе, а именно: рассматривая все возможные остатки от деления целого числа на 6, показать, что числа n^3 и n имеют одинаковые остатки при делении на 6.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Докажите, что при $a > b > c$ выполняется неравенство $a+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq c+4$.

Пусть $a - b = m > 0$, $b - c = n > 0$. Сложив эти равенства почленно, получим, что $a - c = m + n$. Перенесем в доказываемом неравенстве слагаемое c в левую часть и сделаем указанные замены. Тогда неравенство примет вид: $m+n+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geq 4$.

Полученное неравенство верно, так как при всех $x > 0$ справедливо, что $x+\frac{1}{x}\geq 2$. Следовательно, доказываемое неравенство также верно.

Отметим, что возможны также и «лобовые» способы доказательства, но они связаны со значительными техническими трудностями.

3.2. На окружности отмечены точки A и B, из которых проведены равные отрезки касательных AP и BQ так, что AB и PQ не параллельны. В каком отношении прямая AB делит отрезок PQ?

Ответ: в отношении 1 : 1.

Первый способ. Пусть заданные отрезки касательных расположены так, как показано на рис. 3а. Тогда T – точка пересечения прямых AP и BQ, R – точка, симметричная точке P относительно точки A.

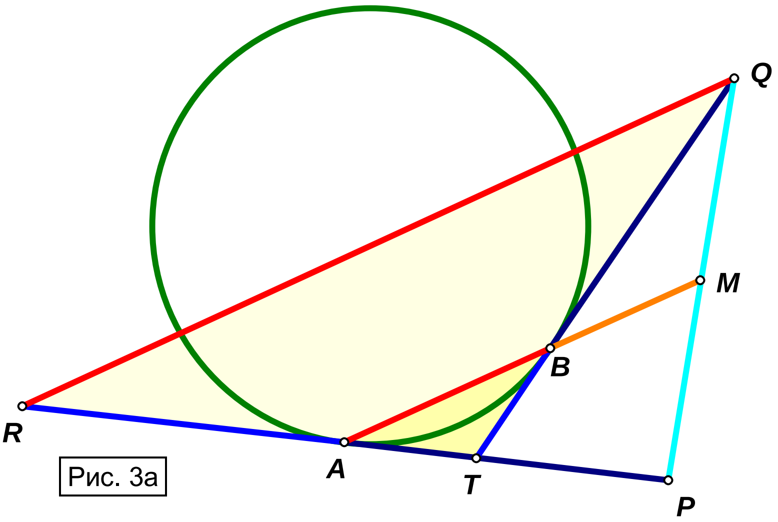


Рис. 3а

Получим, что $TA = TB$ (отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки), значит, $RT = RA + AT = PA + BT = QB + BT = QT$. Следовательно, треугольники ATB и RTQ – равнобедренные с общим углом при вершине, поэтому прямые AB и RQ параллельны. Так как A – середина отрезка RP, то (по теореме Фалеса) прямая AB пересекает отрезок PQ в его середине.

Второй способ. Пусть прямая AB пересекает отрезок PQ в точке M, O – центр данной окружности, тогда радиусы OA и OB перпендикулярны касательным AP и BQ соответственно (см. рис. 3б). Прямоугольные треугольники OAP и OBQ равны (по двум катетам), следовательно, $OP = OQ$ и $\angle AOP = \angle BOQ$. Тогда $\angle AOB = \angle POQ$, то есть в равнобедренных треугольниках AOB и POQ равны углы при вершинах, следовательно, в этих треугольниках равны углы при основаниях. Из того, что $\angle OAB = \angle OPQ$, следует, что четырехугольник $OAPM$ – вписанный, тогда $\angle OAP + \angle OMP = 180°$, значит, $\angle OMP = 90°$.

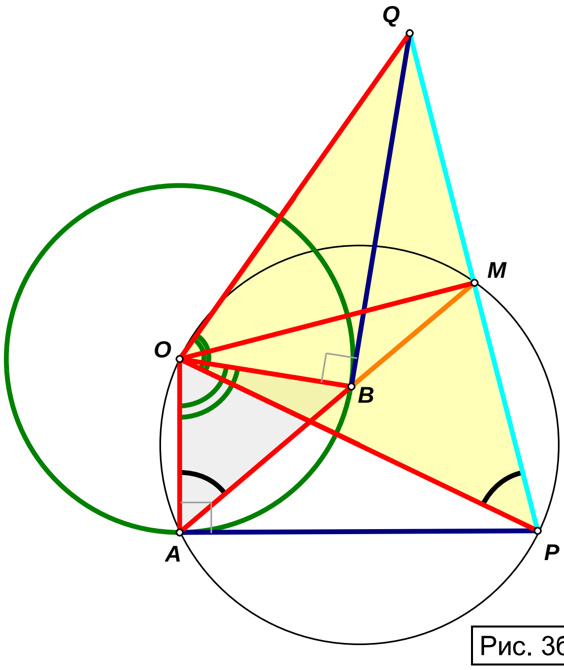


Рис. 3б

Таким образом, OM – высота равнобедренного треугольника POQ, проведенная к основанию, поэтому OM – медиана этого треугольника, то есть M – середина PQ.

Отметим, что равенства OP = OQ и ∠AOB = ∠POQ можно было также получить, рассмотрев поворот с центром в точке O, при котором точка B является образом точки A. Из условия задачи следует, что образом отрезка AP при таком повороте является отрезок BQ.

Отметим также, что при другом расположении заданных отрезков касательных рассуждения аналогичны.

3.3. В круговом футбольном турнире участвовало n команд ($n \geq 5$), за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. В итоге все команды набрали одинаковое количество очков. Докажите, что найдутся хотя бы три команды, имеющие одинаковое количество побед.

Пусть по итогам турнира каждая из n команд набрала m очков, то есть всего было набрано mn очков. В турнире было проведено $\frac{n(n-1)}{2}$ матчей, в которых было разыграно не более, чем $\frac{3n(n-1)}{2}$ очков. Следовательно, $mn \leq \frac{3n(n-1)}{2}$, то есть $m \leq \frac{3(n-1)}{2}$.

Пусть $m = 3k + p$, где k – количество побед, p – количество ничьих. Тогда $k = \frac{m-p}{3} \leq \frac{m}{3} \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$. Так как m фиксировано и $p = m - 3k$, то различных наборов вида (k; p) не больше, чем $\frac{n}{2}$. При этом, крайние случаи (соответствующие $k = 0$ и $k = \frac{n-1}{2}$) не могут реализовываться одновременно, то есть указанных наборов меньше, чем $\frac{n}{2}$. Тогда, по принципу Дирихле, найдутся хотя бы три команды, имеющие одинаковый набор из побед и ничьих.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Стороны a, b и c треугольника связаны соотношением $a^8 + b^8 + c^8 = 2a^4b^4 + 2b^4c^4 + 2c^4a^4$. Определите вид треугольника (по углам).

Ответ: прямоугольный.

Преобразуем исходное равенство: $a^8 + b^8 + c^8 + 2a^4b^4 - 2b^4c^4 - 2c^4a^4 = 4a^4b^4 \Leftrightarrow (a^4 + b^4 - c^4)^2 - (2a^2b^2)^2 = 0 \Leftrightarrow (a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - c^4)(a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - c^4) = 0 \Leftrightarrow ((a^2 + b^2)^2 - (c^2)^2)((a^2 - b^2)^2 - (c^2)^2) = 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2 - c^2) = 0$.

Так как $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, то справедливо хотя бы одно из трех равенств: $a^2 + b^2 = c^2$ или $a^2 + c^2 = b^2$ или $b^2 + c^2 = a^2$, то есть треугольник – прямоугольный.

4.2. В прямоугольный треугольник вписана окружность и к ней перпендикулярно гипотенузе проведены касательные, пересекающие гипотенузу в точках D и E. Под каким углом виден отрезок DE из вершины прямого угла?

Ответ: Под углом в 45°.

Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник (∠C = 90°), I – центр вписанной в него окружности, A_1, B_1 и C_1 – точки ее касания со сторонами треугольника, отрезки RD и TE – касательные к окружности (P и Q – точки касания, см. рис. 4 а, б).

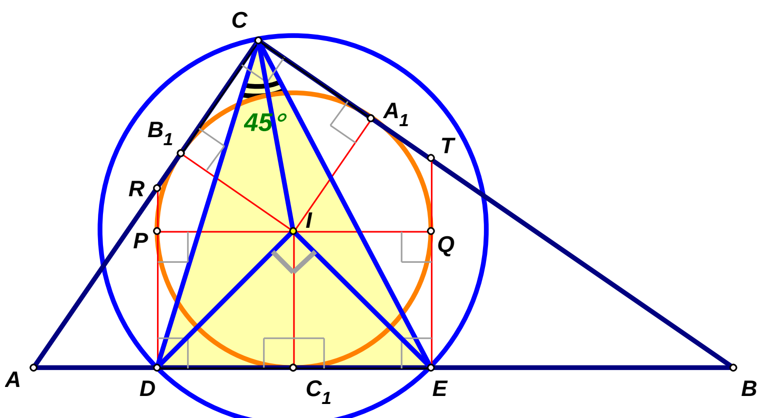


Рис. 4а

Четырехугольники IB_1CA_1, $IPDC_1$ и $IQEC_1$ являются равными квадратами со стороной r, равной радиусу вписанной в треугольник окружности (из условия задачи следует, что каждый из них имеет по три прямых угла и пару смежных сторон, равных радиусу).

Далее можно рассуждать по-разному.

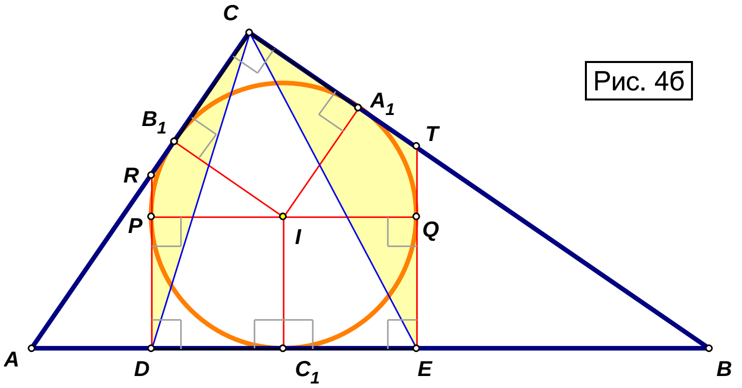


Рис. 4б

<u>Первый способ</u>. Точки *C*, *D* и *E* находятся на одинаковом расстоянии, равном $r\sqrt{2}$, от точки *I*, значит, существует окружность с центром *I*, содержащая эти точки (см. рис. 4а). В этой окружности прямой угол *DIE* – центральный, следовательно искомый угол *DCE* равен 45° (он вписанный и опирается на ту же дугу *DE* этой окружности).

<u>Второй способ</u>. Заметим, что треугольники *DRC* и *ETC* – равнобедренные (см. рис. 4б). Действительно, $DR = DP + RP = RB_1 + B_1C = CR$, аналогично, $ET = CT$. Тогда $\angle RCD = \frac{180^0 - \angle CRD}{2} = \frac{180^0 - (180^0 - \angle ARD)}{2} = \frac{\angle ARD}{2} = \frac{90^0 - \angle A}{2} = \frac{\angle B}{2}$. Аналогично получим, что $\angle TCE = \frac{\angle A}{2}$. Таким образом, $\angle DCE = 90^0 - (\angle RCD + \angle TCE) = 90^0 - \frac{\angle B + \angle A}{2} = 90^0 - 45^0 = 45^0$.

4.3. Дан квадрат 4×4 и четыре разных цвета. Сколькими способами можно покрасить клетки квадрата так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке присутствовали все цвета?

<u>Ответ</u>: $24^2 = 576$ способами.

Рис. 5а

Б	С	К	Ч

Для удобства обозначим цвета: красный, синий, белый и черный. Тогда для верхней строки таблицы существует 4! = 24 способа раскраски. Для каждого из 24 способов раскраски верхней строки существует 3! = 6 способов раскраски левого столбца.

Рассмотрим один из способов раскраски верхней строки. Без ограничения общности можно считать, что клетки покрашены так, как это показано на рис. 5а.

Пусть левый столбец покрашен в таком же порядке (БСКЧ), тогда вторую строку можно покрасить тремя способами, первый из которых дает два случая (см. рис. 5 б, в), а два других однозначно определяют раскраску таблицы (см. рис. 5 г, д). Следовательно, всего существует $24 \cdot 6 \cdot (3 + 1) = 24^2$ способов раскраски таблицы.

Б	С	К	Ч
С	Б	Ч	К
К	Ч	С	Б
Ч	К	Б	С

Рис. 5б

Б	С	К	Ч
С	Б	Ч	К
К	Ч	Б	С
Ч	К	С	Б

Рис. 5в

Б	С	К	Ч
С	К	Ч	Б
К	Ч	Б	С
Ч	Б	С	К

Рис. 5г

Б	С	К	Ч
С	Ч	Б	К
К	Б	Ч	С
Ч	К	С	Б

Рис. 5д

При любом другом способе раскраски левого столбца рассуждения аналогичны, только вместо второй строки рассматривается та строка, в которой самая левая клетка – синяя.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}$, если числа *a* и *b* неотрицательны и *a* + *b* = 1.

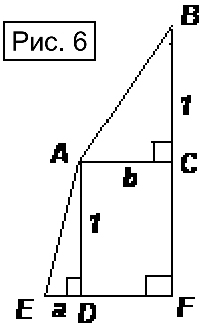


Рис. 6

<u>Ответ</u>: $\sqrt{5}$.

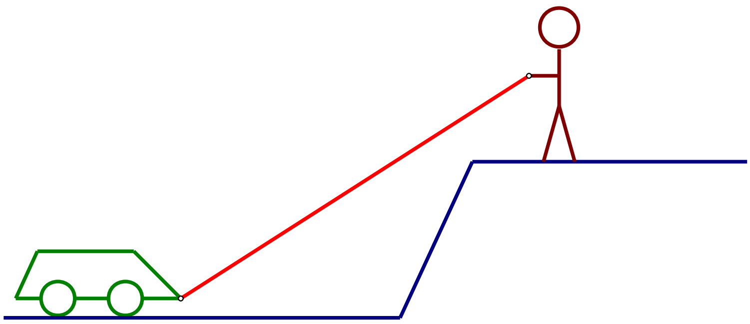
<u>Первый способ</u>. Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC* с катетами *BC* = 1 и *AC* = *b* и прямоугольный треугольник *AED* с катетами *AD* = 1 и *DE* = *a*, расположив их так, как показано на рис. 6. Тогда $AE=\sqrt{1+a^2}$, $AB=\sqrt{1+b^2}$. Сумма длин этих отрезков наименьшая, если точка *A* лежит на отрезке *BE*, тогда искомое значение равно $\sqrt{EF^2+BF^2}=\sqrt{5}$.

Отметим, что если точка A лежит на отрезке BE, то треугольники AED и BAC подобны, поэтому $\frac{ED}{AC}=\frac{AD}{BC}$. *Следовательно, найденное наименьшее значение достигается при* $a=b=\frac{1}{2}$.

<u>Второй способ</u>. Пусть *a* = 0,5 + *t*; *b* = 0,5 – *t*, где 0 ≤ *t* ≤ 0,5. Тогда *S* = $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}$ = $\sqrt{t^2+t+1{,}25}$ + $\sqrt{t^2-t+1{,}25}$. Следовательно, $S^2 = 2t^2 + 2{,}5 + 2\sqrt{\left(t^2+\frac{5}{4}\right)^2-t^2}$ = $2t^2 + 2{,}5 + 2\sqrt{t^4+\frac{3}{2}t^2+\frac{25}{16}}$. = $2t^2 + 2{,}5 + 2\sqrt{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2+1}$. Таким образом, наименьшее значение S^2 достигается при *t* = 0 и равно 5.

Так как *S* > 0, то $S=\sqrt{S^2}$. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ – возрастающая, то наименьшее значение *S* также достигается при *t* = 0 и равно $\sqrt{5}$.

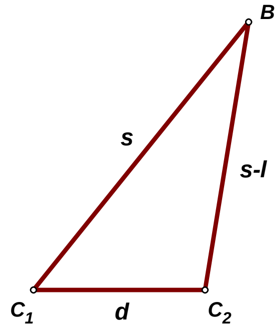
5.2. Ребенок, находящийся на мосту, тянет за веревку игрушечный автомобильчик, который катится по дороге под мостом (см. рисунок). Известно, что, «притягивая» машинку, он намотал 10 см веревки. Верно ли, что игрушка также сдвинется на 10 см? Ответ обоснуйте.



<u>Ответ</u>: нет, не верно.

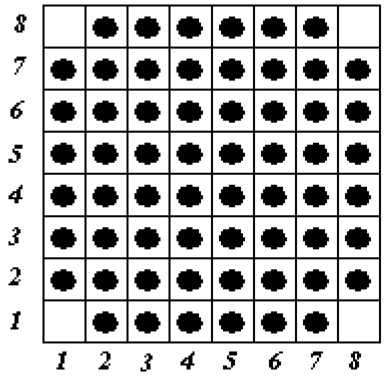
Пусть точка *B* – местонахождение мальчика и машинка сдвигается из точки C_1 в точку C_2 на расстояние *d* (см. рис. 7). Введем еще обозначения: *s* – начальная длина веревки, *l* – длина, на которую мальчик намотал веревку. Тогда расстояние между мальчиком и игрушкой (после перемещения ее в точку C_2) станет равным *s* – *l*. Используя неравенство треугольника, получим: $BC_2 + C_2C_1 > BC_1$, то есть *d* + (*s* – *l*) > *s*. Следовательно, *d* > *l*, значит, игрушка сдвинется на расстояние, большее, чем 10 см.

Рис. 7



5.3. Ходом фишки, стоящей на некоторой клетке *K* доски 8×8, назовем ее прыжок на свободную клетку, которая симметрична *K* относительно какой-нибудь другой стоящей на доске фишки. Какое наибольшее количество фишек можно поставить на клетки этой доски так, чтобы любая фишка могла сделать ход?

Рис. 8



Ответ: 60 фишек.

Занумеруем все вертикали доски слева направо, а горизонтали – снизу вверх. Рассмотрим фишки, заполняющие любой квадрат размером 2×2. Клетки такого квадрата реализуют все возможные сочетания четностей номеров вертикалей и горизонталей (ЧЧ, ЧН, НЧ, НН). При любом ходе фишки четность номеров вертикали и горизонтали не изменяется. Поэтому для каждой из рассматриваемых фишек должна существовать «своя» свободная клетка. Следовательно, количество свободных клеток не может быть меньше четырех.

Такая расстановка существует: четыре угловые клетки свободны, а на остальных стоят фишки (см. рис. 8). Несложно проверить, что в этом случае любая фишка сможет попасть в одну из угловых. Это достаточно проверить для любого углового квадрата 4×4, так как рассматриваемая расстановка фишек симметрична.

Математическая регата 9 классов 10.10.2009

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Известно, что x и y – различные числа, причем $(x – 2008)(x – 2009) = (y – 2008)(y – 2009)$. Какие значения может принимать выражение $x + y$?

Ответ: 4017.

Первый способ. В данном равенстве раскроем скобки, перенесем все в левую часть, и разложим ее на множители: $x^2 – y^2 – 4017x + 4017y = 0 \Leftrightarrow (x – y)(x + y – 4017) = 0$. Так как $x \neq y$, то $x + y = 4017$.

Второй способ. Пусть $(x – 2008)(x – 2009) = (y – 2008)(y – 2009) = c$, тогда x и y – корни квадратного уравнения $z^2 – (2008 + 2009)z + 2008\cdot 2009 – c = 0$. По теореме Виета находим сумму корней полученного квадратного уравнения: $x + y = 2008 + 2009 = 4017$.

Заметим, что квадратное уравнение, рассмотренное при этом способе решения, имеет корни. Действительно, в силу введенного обозначения, существование этих корней равносильно существованию чисел x и y, удовлетворяющих условию задачи.

1.2. Один из углов равнобедренного треугольника равен 120°. Из середины основания опущен перпендикуляр на боковую сторону. В каком отношении основание перпендикуляра делит боковую сторону?

Ответ: 3 : 1, считая от вершины основания.

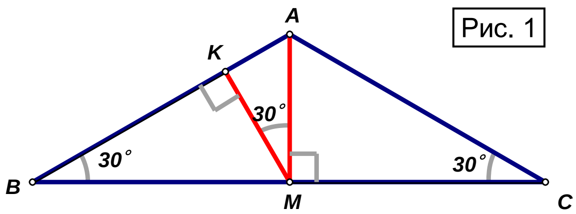


Рис. 1

Пусть в треугольнике ABC $AB = AC$, тогда $\angle BAC = 120°$ (см. рис. 1). Обозначим: M – середину BC, K – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на сторону BC. Так как $\angle AMK = \angle ABM = 30°$, то $AM = \frac{1}{2}AB$, $AK = \frac{1}{2}AM$, то есть $AK = \frac{1}{4}AB$. Следовательно, $\frac{BK}{KA} = \frac{3}{1}$.

1.3. Верно ли, что число 999991 – простое?

Ответ: нет, не верно.

Так как $999991 = 1000000 – 9 = 1000^2 – 3^2 = (1000 + 3)(1000 – 3) = 1003\cdot 997$, то это число – составное.

Непосредственным перебором можно найти наименьший простой делитель данного числа – 17, но сделать это быстро без помощи калькулятора – не просто.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. В математической школе все учащиеся сидят за партами по двое, причем у 60% мальчиков сосед по парте – тоже мальчик, а у 20% девочек сосед по парте – тоже девочка. Какую часть учащихся этой школы составляют девочки?

Ответ: одну треть.

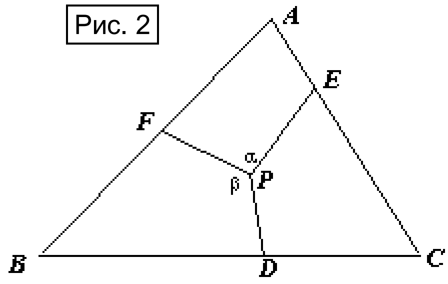
Заметим, что у 40% мальчиков сосед по парте – девочка, а у 80% девочек сосед по парте – мальчик. Следовательно, 40% от количества всех мальчиков равно 80% от количества всех девочек, значит, мальчиков в школе в два раза больше, чем девочек. Таким образом, девочки составляют одну треть.

Аналогичные рассуждения можно также провести, используя переменные.

2.2. Точку внутри треугольника соединили отрезками с тремя точками, взятыми по одной на каждой стороне. Докажите, что если из трех образовавшихся четырехугольников два являются вписанными, то и третий четырехугольник также является вписанным.

Пусть точка P лежит внутри треугольника ABC, а точки D, E и F лежат на его сторонах BC, AC и AB соответственно (см. рис. 2).

Рис. 2



Из того, что два четырехугольника, например, $AFPE$ и $BFPD$ – вписанные, следует, что $\angle A + \alpha = 180°$ и $\angle B + \beta = 180°$ (α и β – углы этих четырехугольников при вершине P). Тогда $\angle C + \angle DPE = (180° - \angle A - \angle B) + (360° - \alpha - \beta) = 540° - (\angle A + \alpha) - (\angle B + \beta) = 180°$.

Следовательно, четырехугольник $CDPE$ – вписанный, что и требовалось.

Отметим, что выпуклость всех образовавшихся четырехугольников следует из условия задачи. Действительно, вписанные четырехугольники AFPE и BFPD являются выпуклыми по определению. Предположим, что четырехугольник CDPE – не выпуклый, то есть $\angle DPE > 180°$. *Тогда* $\alpha + \beta < 180°$, *значит,* $\angle A + \angle B > 180°$, *что невозможно.*

2.3. 16 карточек занумеровали от числами 1 до 16. Можно ли их выложить вдоль одной прямой так, чтобы сумма номеров на любых двух соседних карточках была точным квадратом?

Ответ: да, можно.

Пример:

16	9	7	2	14	11	5	4	12	13	3	6	10	15	1	8

Отметим, что приведенная расстановка единственна (с точностью до симметрии). Действительно, число 16 может стоять только с краю, так как среди оставшихся чисел нет двух таких, которые в сумме с 16 дают квадраты.

После этого часть таблицы восстанавливается однозначно (до числа 3):

16	9	7	2	14	11	5	4	12	13	3

Для следующей клетки возможны два варианта: 1 или 6, но первый вариант до конца не доводится.

Заметим также, что в приведенном примере самая «популярная» сумма двух соседей – 16, которая встречается 7 раз.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $a + b \geq 2$, то $a^3 + b^3 \geq 2$.

Первый способ. Так как $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ и $a + b \geq 2$, то для доказательства требуемого неравенства достаточно доказать, что $a^2 - ab + b^2 \geq 1$.

$a^2 - ab + b^2 \geq 1 \Leftrightarrow 2a^2 - 2ab + 2b^2 \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a - b)^2 \geq 2$. Так как $(a - b)^2 \geq 0$, то остается доказать, что $a^2 + b^2 \geq 2$.

Действительно, из неравенства $a + b \geq 2$ следует, что $(a + b)^2 \geq 4 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4$. Учитывая, что $a^2 + b^2 \geq 2ab$, получим: $2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2 \geq 4 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2$.

Следовательно, $a^3 + b^3 \geq 2$, что и требовалось.

Второй способ. Как показано выше, из неравенства $a + b \geq 2$ следует, что $a^2 + b^2 \geq 2$.

Перемножим два верных неравенства с положительными членами: $a + b \geq 2$ и $a^2 + b^2 \geq 2$. Получим: $(a^2 + b^2)(a + b) \geq 4 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 \geq 4$.

Докажем, что при $a \geq 0$, $b \geq 0$ выполняется неравенство $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$. Действительно, $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = a^2(a - b) - b^2(a - b) = (a - b)^2(a + b) \geq 0$.

Таким образом, $2(a^3 + b^3) \geq a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 \geq 4$, то есть $a^3 + b^3 \geq 2$, что и требовалось.

Третий способ. Докажем, что при $a \geq 0$, $b \geq 0$ выполняется неравенство $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$.

Действительно, $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 4a^3 + 4b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$, а справедливость последнего неравенства уже доказана выше.

Используя доказанное неравенство, получим: $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geq 1 \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq 2$.

Отметим, что использованное неравенство $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ *аналогично неравенству между средним квадратичным и средним арифметическим двух неотрицательных чисел. Оба этих неравенства являются частными случаями неравенства* $\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$*, которое выполняется для всех натуральных значений n.*

Четвертый способ. Рассмотрим график функции $f(x) = x^3$. Пусть a и b – два положительных значения аргумента, тогда все точки этого графика, абсциссы которых принадлежат $[a; b]$, располагаются не выше, чем отрезок AB, где $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ (см. рис. 3).

Следовательно, $\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Это означает, что выполняется неравенство $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, из которого, как показано выше, следует требуемое неравенство.

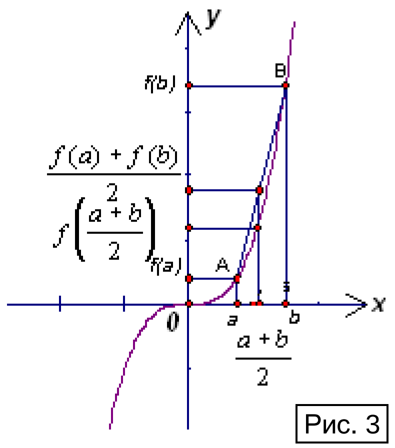


Рис. 3

Отметим, что в приведенном рассуждении практически использовано, что график функции $f(x) = x^3$ при $x \in [0; +\infty)$ расположен «выпуклостью вниз». Это означает, что множество точек координатной плоскости, располагающееся над графиком, является выпуклым (содержит целиком любой отрезок, концы которого принадлежат этому множеству). Использованное неравенство (называемое неравенством Йенсена) выполняется для всех функций f(x), графики которых на [a; b] обладают этим свойством. Для функций, графики которых на [a; b] расположены «выпуклостью вверх» выполняется неравенство $\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. *В обоих случаях равенство достигается тогда и только тогда, когда a = b.*

Пятый способ. Пусть $a = t - x$, $b = t + x$, тогда $a + b = 2t$. Из условия задачи следует, что $t \geq 1$. Следовательно, $a^3 + b^3 = (t - x)^3 + (t + x)^3 = 2t^3 + 6tx^2 \geq 2t^3 \geq 2$, так как $t^3 \geq 1$.

Отметим, что и в этом способе решения фактически доказывается неравенство $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ *для положительных a и b.*

3.2. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные прямым CD и BC соответственно. Докажите, что точка пересечения этих прямых лежит на прямой AC.

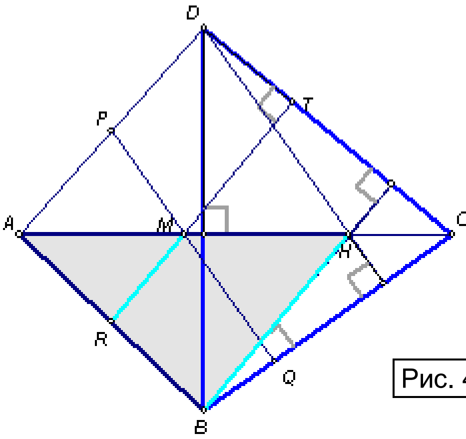


Рис. 4

Пусть R и P – середины сторон AB и AD соответственно, T и Q – основания перпендикуляров, опущенных из R и P на CD и BC, M – точка пересечения RT и PQ (см. рис. 4).

В треугольнике BDC проведем высоты из вершин B и D, H – точка их пересечения. Из того, что $BD \perp AC$ следует, что H лежит на прямой AC.

Рассмотрим треугольник ABH. Так как R – середина AB и $RT \parallel BH$, то прямая RT пересекает сторону AH в ее середине (по теореме Фалеса). Аналогично, так как P – середина AD и $PQ \parallel DH$, то и прямая PQ пересекает отрезок AH в его середине. Следовательно, точка M пересечения RT и PQ является серединой AH, то есть лежит на диагонали AC, что и требовалось.

Отметим, что во второй части доказательства (доказав, что точка H лежит на AC) можно было также использовать, что стороны треугольников RMP и BHD соответственно параллельны, поэтому при гомотетии с центром A один из этих треугольников является образом другого. Следовательно, точки A, M и H лежат на одной прямой.

3.3. Два приятеля пришли на базар. Веселый молодец продавал 20 котов по цене от 12 до 15 рублей и 20 мешков по цене от 30 копеек до 1 рубля. При этом цены всех котов и всех мешков попарно различны. Верно ли, что каждый из друзей может купить по коту в мешке так, чтобы они заплатили одинаковую сумму денег?

Ответ: да, верно.

Заметим, что наименьшая стоимость кота в мешке – 12 рублей 30 копеек, а наибольшая – 16 рублей. Следовательно, количество вариантов возможных стоимостей кота в мешке не больше, чем количество целых чисел на отрезке [1230; 1600], то есть не больше, чем 371. Поскольку цены всех котов и всех мешков попарно различны, то количество различных пар вида «кот – мешок» равно $20 \cdot 20 = 400$.

Следовательно (по принципу Дирихле), обязательно найдутся две пары, имеющие одинаковую стоимость.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Решите уравнение: $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$.

Ответ: –9; 11.

Первый способ. Прибавим к обеим частям уравнения выражение $4x^2 + 400x + 1$. Получим: $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - (2x + 100)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 101 = 0$ или $x^2 - 2x - 99 = 0$.

Первое из полученных квадратных уравнений корней не имеет, а корни второго уравнения: –9 и 11.

Второй способ. Заменим число 100 в данном уравнении переменной a и решим полученное квадратное уравнение относительно a: $x^4 - 2x^2 - 4xa = a^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 + 4xa - (x^2 - 1)^2 = 0$; $\frac{D}{4} = 4x^2 + (x^2 - 1)^2 = (x^2 + 1)^2$; $a = -2x \pm (x^2 + 1)$. Подставив вместо переменной а число 100, получим приведенные выше квадратные уравнения с переменной x.

4.2. Внутри квадрата *ABCD* взята точка *P* такая, что *AP* : *BP* : *CP* = 1 : 2 : 3. Найдите угол *APB*.

Ответ: 135°.

Пусть *AP* = *t*, *BP* = 2*t* и *CP* = 3*t*. Повернем треугольник *ABP* вокруг вершины *B* на угол 90° (см. рис. 5). Его образом будет треугольник *CBP*', значит, *CP*' = *AP* = *t*, *BP*' = *BP* = 2*t*.

Так как треугольник *PBP*' – прямоугольный и равнобедренный, то *PP*' = $2t\sqrt{2}$. Тогда, в треугольнике *PP*'*C*: $PP'^2 + P'C^2 = 8t^2 + t^2 = 9t^2 = PC^2$, то есть ∠*PP*'*C* = 90°. Следовательно, ∠*APB* = ∠*BP*'*C* = 90° + 45° = 135°.

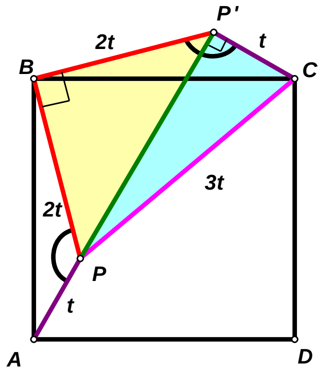


Рис. 5

4.3. Квадрат разделили на прямоугольники, проведя несколько разрезов, параллельно его сторонам (от края до края). Оказалось, что сумма периметров этих прямоугольников в семь раз больше периметра исходного квадрата. Какое наибольшее количество прямоугольников могло получиться?

Ответ: 49.

Рассмотрим квадрат *ABCD* со стороной *a*, тогда его периметр равен 4*a*. Пусть проведенные разрезы разбили сторону *AB* на *m* отрезков, а сторону *BC* – на *n* отрезков (см. рис. 6). Количество получившихся при этом прямоугольников равно *mn*.

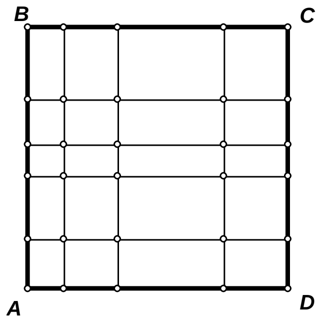


Рис. 6

Так как каждый отрезок, лежащий на границе квадрата *ABCD*, является стороной одного из таких прямоугольников, а каждый внутренний отрезок – стороной двух прямоугольников, то сумма периметров образовавшихся прямоугольников равна: 2(*m* – 1)*a* + 2(*n* – 1)*a* + 4*a* = 2(*m* + *n*)*a*.

По условию задачи: 2(*m* + *n*)*a* = 28*a*, то есть *m* + *n* = 14. Если сумма двух положительных чисел *m* и *n* фиксирована, то их произведение достигает наибольшего значения, когда *m* = *n*. Это следует, например, из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим $\sqrt{mn} \le \frac{m+n}{2}$ или из того, что наибольшее значение квадратичной функции *f*(*x*) = *x*(S – *x*) достигается при $x = \frac{S}{2}$.

Таким образом, *m* = *n* = 7; *mn* = 49.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Известно, что *x* + *y* + *z* = *a* и $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = a^{-1}$. Какие значения может принимать выражение (*x* – *a*)(*y* – *a*)(*z* – *a*)?

Ответ: 0.

Первый способ. Из равенства $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ следует, что *a*(*xy* + *yz* + *xz*) = *xyz*. Учитывая также, что *x* + *y* + *z* = *a*, получим: (*x* – *a*)(*y* – *a*)(*z* – *a*) = –(*a* – *x*)(*a* – *y*)(*a* – *z*) = $-a^3 + (x + y + z)a^2 - (xy + yz + xz)a + xyz = -a^3 + a^3 - xyz + xyz = 0$.

<u>Второй способ</u>. Из условия задачи следует:

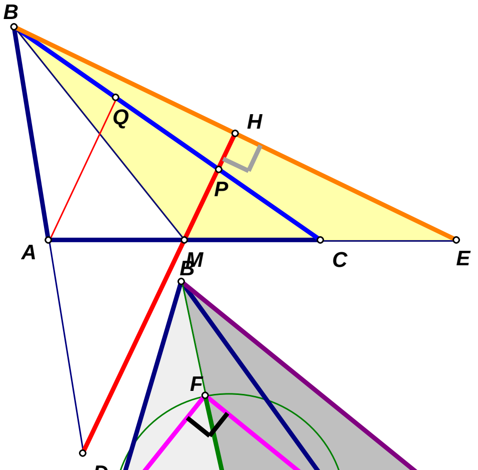
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y+z}-\frac{1}{z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+y}{xy}=-\frac{x+y}{(x+y+z)z} \Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{(x+y+z)z}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x+y)\left(\frac{xz+yz+z^2+xy}{xyz(x+y+z)}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x+y)\left(\frac{z(x+z)+y(x+z)}{xyz(x+y+z)}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz(x+y+z)}=0.$$

Следовательно, выполняется хотя бы одно из равенств: $x = –y$ или $y = –z$ или $z = –x$. Тогда из первого равенства в условии получим, что $z = a$ или $x = a$ или $y = a$. Это означает, что $(x – a)(y – a)(z – a) = 0$.



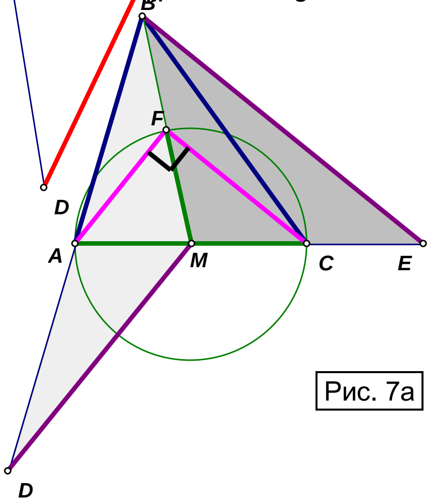


Рис. 7а

5.2. В треугольнике *ABC* медиана *BM* равна стороне *AC*. На продолжениях сторон *BA* и *AC* за точки *A* и *C* выбраны точки *D* и *E* соответственно, причём *AD* = *AB* и *CE* = *CM*. Докажите, что прямые *DM* и *BE* перпендикулярны.

<u>Первый способ</u>. Пусть *F* – середина отрезка *BM* (см. рис. 7а). Из условия задачи следует, что *MF* = *MA* = *MC*, значит, $\angle AFC = 90°$. Кроме того, из условия следует, что *AF* – средняя линия треугольника *DBM*, а *CF* – средняя линия треугольника *BME*. Следовательно, *DM* || *AF*, *BE* || *CF*, поэтому, $DM \perp BE$, что и требовалось.

<u>Второй способ</u>. Пусть прямая *DM* пересекает прямую *BC* в точке *P*, а прямую *BE* – в точке *H* (см. рис. 7б).

Заметим, что из условия задачи следует, что *BM* = *EM*, поэтому, утверждение задачи равносильно тому, что *MH* – медиана треугольника *BME*. Докажем это.

Пусть *Q* – середина отрезка *BP*. Тогда *AQ* – средняя линия треугольника *DBP*, значит *AQ* || *PM*. Так как *M* – середина *AC*, то *MP* – средняя линия треугольника *AQC*, то есть *PQ* = *CP*. Таким образом, $\frac{BP}{CP}=\frac{2}{1}$.

Рис. 7б

Так как *BC* – медиана треугольника *BME*, то полученное отношение показывает, что *P* – точка пересечения медиан этого треугольника, то есть *MH* также является медианой треугольника *BME*, что и требовалось.

5.3. Верно ли, что среди чисел вида $2^n + 4^k$ (*n* и *k* – натуральные числа) бесконечно много квадратов целых чисел?

<u>Ответ</u>: да, верно.

$2^n + 4^k = 2^n + 2^{2k} = 2^{2k}(2^{n-2k} + 1)$. Первый множитель является точным квадратом при любом натуральном значении *k*, а второй множитель будет точным квадратом при $n = 2k + 3$. Таким образом, среди чисел указанного вида бесконечно много квадратов.

Эту же идею можно было оформить иначе: пусть $n = 2k + 3$, *где* $k \in N$, *тогда* $2^n + 4^k = 2^{2k+3} + 4^k = 4^k(8 + 1) = (2^k \cdot 3)^2$.

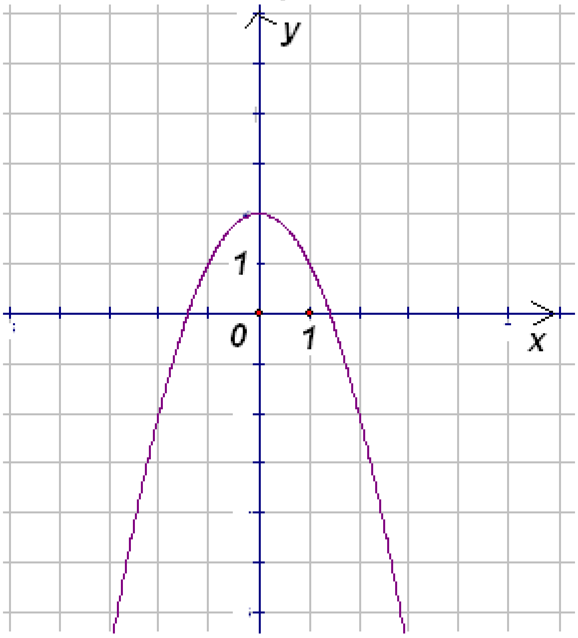
Отметим, что если $n \neq 2k + 3$, *то число заданного вида не является точным квадратом, поскольку число вида* $2^m + 1$ *является квадратом натурального числа только при* $m = 3$. *Действительно, пусть* $2^m + 1 = p^2$, *где p – натуральное, тогда* $2^m = (p – 1)(p + 1)$. *Следовательно, каждый сомножитель в правой части этого равенства является степенью числа 2. Но существуют только две степени двойки, отличающиеся на 2, а именно,* 2^1 *и* 2^2, *значит,* $p = 3$ *и* $m = 3$.

Математическая регата 2010

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. На координатной плоскости изображен график функции $y = ax^2 + c$ (см. рисунок). В каких точках график функции $y = cx + a$ пересекает оси координат?



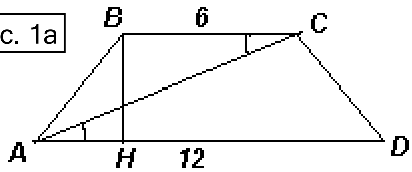
Ответ: в точках (0,5; 0) и (0; -1).

Так как данный график пересекает ось y в точке (0; 2), то $c = 2$. Кроме того, он проходит через точку (1; 1), значит $1 = 2 + a$, то есть $a = -1$.

Таким образом, новая функция задается уравнением $y = 2x - 1$. Ее график пересекает ось x в точке (0,5; 0), а ось y – в точке (0; –1).

1.2. В равнобокой трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 12 и 6 соответственно, а высота равна 4. Сравните углы BAC и CAD.

Рис. 1а



Ответ: угол BAC больше, чем угол CAD.

Первый способ. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle CAD = \angle BCA$ (см. рис. 1а). Пусть BH – высота трапеции. Тогда $AH = \dfrac{AD - BC}{2} = 3$; $BH = 4$, следовательно, из прямоугольного треугольника ABH: $AB = 5$.

Таким образом, в треугольнике ABC $BC > AB$, значит, $\angle BAC > \angle BCA$ (против большей стороны треугольника лежит больший угол). Следовательно, $\angle BAC > \angle CAD$.

Второй способ. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E (см. рис. 1б). Так как $BC \parallel AD$ и $BC = \frac{1}{2}AD$, то BC - средняя линия треугольника AED. Вычислив боковую сторону трапеции (аналогично первому способу решения), получим, что $AE = 2AB = 10$.

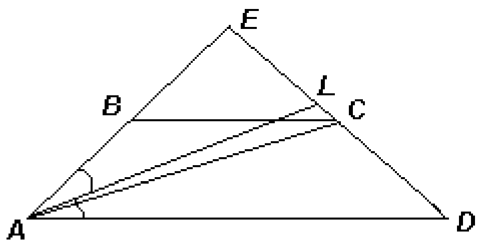


Рис. 1б

Проведем биссектрису AL треугольника AED. По свойству биссектрисы $\dfrac{LD}{LE} = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{12}{10} > 1$, значит, точка L лежит между точками C и E. Следовательно, $\angle BAC > \angle CAD$.

1.3. На доске записаны числа 1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность – неотрицательное число. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 15?

Ответ: да, может.

Искомая последовательность операций видна из следующей записи:

15 = 32 – 16 – (8 – 4 – 2 – 1).

Отметим, что в результате указанных операций можно получить любое нечетное число от 1 до 31. Это можно доказать, например, методом математической индукции.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Известно, что $5(a - 1) = b + a^2$. Сравните числа a и b.

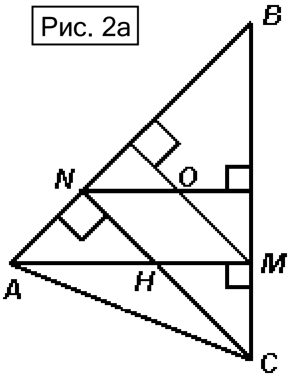
<u>Ответ</u>: $a > b$.

Перепишем условие задачи в виде: $b = -a^2 + 5a - 5$. Выясним знак разности $a - b$. Получим: $a - b = a + a^2 - 5a + 5 = (a - 2)^2 + 1 > 0$. Следовательно, $a > b$.

Если в системе координат (a; b) построить графики функций $b = -a^2 + 5a - 5$ и $b = a$, то первый график располагается ниже, чем второй. Исходя из расположения графиков, можно получить ответ, но строгим доказательством это не является.

2.2. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 45°, AM и CN - его высоты, O - центр описанной окружности, H - ортоцентр (точка пересечения высот). Докажите, что $ONHM$ – параллелограмм.

Рис. 2а



<u>Первый способ</u>. Проведем серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC данного треугольника, которые пересекаются в точке O (см. рис. 2а). Так как в прямоугольном треугольнике BNC $\angle NBC = 45°$, то $BN = NC$, следовательно, точка N лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC. Тогда $NO \parallel HM$. Аналогично, рассмотрев прямоугольный равнобедренный треугольник AMB, получим, что $MO \parallel HN$.

Таким образом, $ONHM$ - параллелограмм (по определению).

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC (см. рис. 2б). Так как этот треугольник – остроугольный, то ее центр O лежит внутри треугольника, причем треугольник AOC – равнобедренный и $\angle AOC = 2\angle ABC = 90°$. Кроме того, $\angle ANC = \angle AMC = 90°$, поэтому точки N, O и M лежат на окружности с диаметром AC.

Тогда $\angle ONC = \angle OAC = 45°$; $\angle ONB = \angle$ÂNC $- \angle ONC = 45°$ и $\angle$ÌÀB $= 90° - \angle$ÀBM $= 45°$. Из равенства углов ONB и ÌÀB следует параллельность прямых NO è AM. Аналогично доказывается, что $MO \parallel CN$.

Следовательно, $ONHM$ - параллелограмм

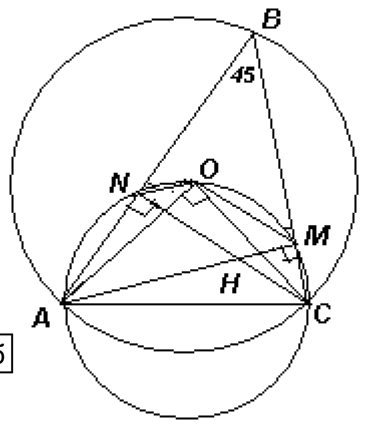


Рис. 2б

2.3. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $A = n^3 + 12n^2 + 15n + 180$ делится на 23.

<u>Ответ</u>: $n = 10$.

Разложим данный многочлен на множители способом группировки: $n^3 + 12n^2 + 15n + 180 = n^2(n + 12) + 15(n + 12) = (n + 12)(n^2 + 15)$. Число A делится на простое число 23, если в любом его разложении на натуральные множители присутствует число, делящееся на 23. Наименьшее значение n, при котором первый множитель делится на 23, равно 11, а для второго множителя такое n равно 10.

Возможен также непосредственный перебор всех натуральных значений n от 1 до 10, но он сопряжен с некоторыми вычислительными трудностями. Перебор можно упростить, заменив число 180 на меньшее число, имеющее такой же остаток при делении на 23, например, на –4.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Пятеро друзей скинулись на покупку. Могло ли оказаться так, что любые два из них внесли менее одной трети общей стоимости?

<u>Ответ</u>: нет, не могло.

Пусть друзья внесли a, b, c, d и e рублей соответственно. Тогда общая сумма внесенных денег равна $a + b + c + d + e = S$.

Предположим, что любые два друга внесли меньше, чем $\frac{1}{3}S$ рублей, тогда выполняются неравенства: $a + b < \frac{1}{3}S$, $a + c < \frac{1}{3}S$, ..., $d + e < \frac{1}{3}S$ (всего таких неравенств - десять). Складывая их почленно, получим, что $4(a + b + c + d + e) < \frac{10}{3}S$, то есть $0{,}4S < \frac{1}{3}S \Leftrightarrow 1{,}2S < S$ - противоречие, так как $S > 0$. Следовательно, указанная ситуация невозможна.

3.2. Существует ли прямоугольный треугольник, в котором две медианы перпендикулярны?

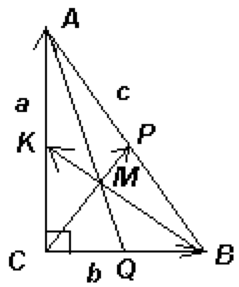


Рис. 3

<u>Ответ</u>: да, существует.

Пусть в треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, CP и BK - медианы, M - их точка пересечения (см. рис. 3).

<u>Первый способ</u>. Обозначим: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тогда $CP = \frac{1}{2}c$; $CM = \frac{2}{3}CP = \frac{1}{3}c$; $BK^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2$; $BM^2 = \frac{4}{9}BK^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}b^2$.

Отрезки CM и BM перпендикулярны тогда и только тогда, когда $CM^2 + BM^2 = BC^2$, то есть $\frac{1}{9}\tilde{n}^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}b^2 = a^2$. Учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$, получим: $\frac{4}{9}a^2 = \frac{2}{9}b^2$, то есть $b = a\sqrt{2}$.

Таким образом, в прямоугольном треугольнике с катетами $CB = a$ и $CA = a\sqrt{2}$. медианы CP и BK перпендикулярны.

Отметим, что медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, не могут быть перпендикулярны. Действительно, если AQ – еще одна медиана, то в четырехугольнике CKMQ углы MKC и MQC – острые, а угол KCQ – прямой, значит, $\angle KMQ > 90°$.

<u>Второй способ</u>. Пусть $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$, тогда $\overline{CP} = \frac{1}{2}\left(\overline{CA} + \overline{CB}\right) = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$; $\overline{BK} = \overline{BA} + \overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{b} - \overline{a}$. Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Значит, $\overline{CP} \cdot \overline{CK} = \frac{1}{4}\overline{b}^2 - \frac{1}{2}\overline{a}^2 - \frac{1}{4}\overline{a} \cdot \overline{b} = \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}a^2$, так как $\overline{a} \perp \overline{b}$ (a и b - модули соответствующих векторов). Следовательно, $\overline{CP} \cdot \overline{CK} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0 \Leftrightarrow b = a\sqrt{2}$.

Заметим, что можно было сразу привести пример требуемого прямоугольного треугольника, указав отношение его катетов или другую тригонометрическую функцию любого из его острых углов, и доказать, что для такого треугольника *выполняется перпендикулярность двух медиан. Для этого, в частности, можно было использовать известный факт, что медианы CP и BK перпендикулярны тогда и только тогда, когда $c^2 + b^2 = 5a^2$.*

Возможны также аккуратные рассуждения, использующие понятие непрерывности.

3.3. Какое наибольшее суммарное количество белых и черных шашек можно расставить в клетках доски 8×8 так, чтобы выполнялось следующее условие: в каждой горизонтали и в каждой вертикали белых шашек должно быть в два раза больше, чем черных?

<u>Ответ</u>: 48 шашек (32 белых и 16 черных).

Заметим, что в любой горизонтали не может быть более двух черных шашек (иначе белых будет не менее шести, а в сумме – не менее девяти), значит, белых шашек – не более четырех. Следовательно, всего черных шашек – не более 16, а белых – не более 32.

Один из возможных примеров расстановки 48 шашек, удовлетворяющих условию, – см. рисунок.

●	○	○	○	○			●
●	●	○	○	○	○		
	●	●	○	○	○	○	
		●	●	○	○	○	○
○			●	●	○	○	○
○	○			●	●	○	○
○	○	○			●	●	○
○	○	○	○			●	●

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Для различных положительных чисел a и b выполняется равенство $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} = \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$. Докажите, что a и b - взаимно обратные числа.

Разобьем правую часть исходного равенства на два одинаковых слагаемых и преобразуем его: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} = \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}} = 0 \Leftrightarrow$ $\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{1+a} - \frac{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{1+b} = 0 \Leftrightarrow$ $(\sqrt{b}-\sqrt{a})\left(\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b}\right) = 0$.

Первая скобка равна нулю, тогда и только тогда, когда $a = b$, что противоречит условию. Тогда, учитывая, что $a > 0$ и $b > 0$, получим: $\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b} = 0 \Leftrightarrow$ $\sqrt{a}-\sqrt{b}+b\sqrt{a}-a\sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})(1-\sqrt{ab}) = 0$. Последнее равенство верно тогда и только тогда, когда $a = b$ или $ab = 1$, что и требовалось доказать.

4.2. В выпуклом четырехугольнике *ABCD*: ∠*BAC* = 20°, ∠*BCA* = 35°, ∠*BDC* = 40°, ∠*BDA* = 70°. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

<u>Ответ</u>: 75°.

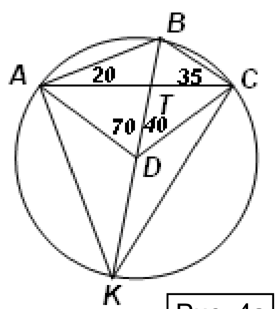


Рис. 4а

Докажем, что точка *D* – центр описанной окружности треугольника *ABC*. Это можно сделать различными способами.

<u>Первый способ</u>. Опишем окружность около треугольника *ABC* и продолжим отрезок *BD* до пересечения с этой окружностью в точке *K* (см. рис. 4а). Так как ∠*BKC* = ∠*BAC* = 20°, то ∠*KCD* = ∠*BDC* – ∠*DKC* = 20° (угол *BDC* – внешний для треугольника *KDC*), следовательно, *DC* = *DK*.

Аналогично, так как ∠*BKA* = ∠*BCA* = 35°, а ∠*BDA* = 70°, то ∠*KÀD* = 35°, то есть *DK* = *DA*. Таким образом, *D* - центр окружности, описанной около треугольника *ACK*, которая совпадает с окружностью, описанной около треугольника *ABC*.

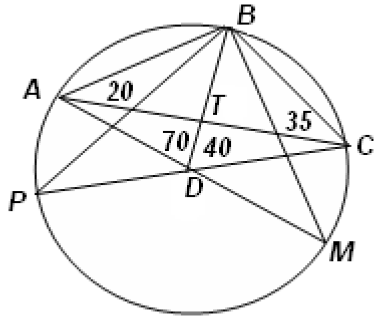


Рис. 4б

Второй способ. На луче AD отметим точку M так, что отрезок $DM = DB$ (см. рис. 4б). Тогда $\angle DBM = \angle BMD = \frac{1}{2}\angle BDA = 35° = \angle BCA$, следовательно, точки A, B, C и M лежат на одной окружности.

Аналогично, отметив на луче CD точку $Đ$ так, что $DP = DB$, получим, что точки A, B, C и P лежат на одной окружности. Так как указанные окружности имеют три общие точки, то эти окружности совпадают, кроме того, точка D равноудалена от точек B, M и P, поэтому она является центром полученной окружности.

Третий способ. Центр описанной окружности тупоугольного треугольника ABC лежит в той же полуплоскости относительно прямой AC, что и точка D (см. рис. 4 а, б). Он является пересечением двух ГМТ: из которых отрезок BC виден под углом $\alpha = 2\angle BAC = 40°$ и из которых отрезок AB виден под углом $\beta = 2\angle BCA = 70°$.

В указанной полуплоскости эти ГМТ являются дугами окружностей, которые имеют единственную общую точку. По условию, из точки D эти же отрезки видны под такими же углами, поэтому точка D совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC.

Теперь ответим на вопрос задачи. Пусть T – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 4 а, б). Из равнобедренного треугольника ADB: $\angle DBA = \frac{180° - \angle BDA}{2} = 55°$; угол BTC – внешний для треугольника BTA, значит, $\angle BTC = \angle TAB + \angle ABT = 75°$.

4.3. Найдите все простые числа p, q и r, для которых выполняется равенство: $p + q = (p - q)^r$.

Ответ: $p = 5$, $q = 3$, $r = 3$.

Из условия задачи вытекает, что $p + q$ делится на $p - q$, следовательно, $(p + q) - (p - q) = 2q$ также делится на $p - q$. Если число q – простое, то делителями числа $2q$ могут являться только числа 1, 2, q и $2q$.

Если $p - q = 1$, то левая часть исходного равенства больше правой. Если $p - q = q$, то $p = 2q$, то есть число p – не простое. Аналогично, если $p - q = 2q$, то $p = 3q$, то есть и в этом случае, p – не простое число. Значит $p - q = 2$. Тогда исходное равенство примет вид: $(q + 2) + q = 2^r \Leftrightarrow q + 1 = 2^{r-1} \Leftrightarrow q = 2^{r-1} - 1$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Если $r = 2$, то $q = 1$ – не простое число. Если r – нечетное число, то $(r - 1)$ - четное, тогда $2^{r-1} - 1$ делится на 3. Действительно, если $k \in N$, то $2^{2k} - 1 = 4^k - 1 = (4 - 1)(4^{k-1} + 4^{k-2} + \ldots +1)$. Таким образом, $q = 3$. Тогда $p = 5$ и $r = 3$.

Доказывать, что $2^{2k} - 1$ делится на 3 можно и другими способами, например, методом математической индукции.

Второй способ. Так как $q = 2^{r-1} - 1 = \left(2^{\frac{r-1}{2}}\right)^2 - 1 = \left(2^{\frac{r-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{r-1}{2}} + 1\right)$, то q может оказаться простым числом только в случае, когда $2^{\frac{r-1}{2}} - 1 = 1$. Значит, $\frac{r-1}{2} = 1 \Leftrightarrow r = 3$. Тогда $q = 3$ и $p = 5$.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Найдите наибольшее натуральное n такое, что $n^{200} < 5^{300}$.

Ответ: $n = 11$.

Перепишем данное неравенство в виде: $\left(n^2\right)^{100} < \left(5^3\right)^{100}$. Тогда, учитывая, что n – натуральное число, достаточно найти наибольшее натуральное решение неравенства $n^2 < 125$. Так как $11^2 < 125 < 12^2$, то искомое значение равно 11.

5.2. В трапеции $ABCD$ биссектриса тупого угла B пересекает основание AD в точке K - его середине, M – середина BC, $AB = BC$. Найдите отношение $KM : BD$.

Ответ: $KM : BD = 1 : 2$.

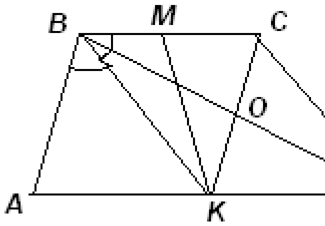


Рис. 5

Так как $\angle ABK = \angle CBK = \angle BKA$, то треугольник ABK – равнобедренный: $AK = AB = BC$. Тогда $ABCK$ – параллелограмм ($BC = AK$, $BC \parallel AK$), и так как $AB = BC$, то $ABCK$ – ромб. Так как $KD = AK = BC$ и $KD \parallel BC$, то $BCDK$ – также параллелограмм.

Пусть O - точка пересечения его диагоналей BD и CK, тогда $BO = \frac{1}{2}BD$. Так как треугольник BCK - равнобедренный ($BC = CK$), то равны его медианы BO и KM, следовательно, $KM = \frac{1}{2}BD$.

5.3. Существует ли натуральное число, которое при делении на сумму своих цифр как в частном, так и в остатке дает число 2011?

Ответ: нет, не существует.

Предположим, что существует натуральное число n с суммой цифр s, которое удовлетворяет условию задачи. Тогда $n = 2011s + 2011$, откуда $n - s = 2010s + 2011$.

Из обоснования признака делимости на 3 следует, что натуральное число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки при делении на 3, поэтому $n - s$ делится на 3. Но число $2010s + 2011$ на 3 не делится, так как $2010s$ кратно 3, а 2011 не кратно 3. Следовательно, равенство $n - s = 2010s + 2011$ выполняться не может, то есть числа n, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

Математическая регата (8.10.2011)

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Верно ли, что если $b > a + c > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?

Ответ: да, верно.

Первый способ. Из данного неравенства следует, что $b^2 > (a+c)^2$, поэтому дискриминант данного уравнения: $D = b^2 - 4ac > (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0$. Значит, $D > 0$, то есть данное уравнение имеет два корня.

Отметим, что условие $a + c > 0$ весьма существенно, иначе, неравенство $b^2 > (a+c)^2$ может не выполняться и данное уравнение не будет иметь корней. Например, при $b = 0$, $a = c = -1$, получим уравнение $-x^2 - 1 = 0$, не имеющее корней.

Второй способ. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$. Из данного неравенства следует, что $a - b + c < 0$ и $a + b + c > 0$. Первое условие означает, что $f(-1) < 0$, а второе условие, – что $f(1) > 0$. Таким образом, график функции должен пересечь ось x, а поскольку это – парабола, то она пересекает ось x в двух точках, то есть данное уравнение имеет два корня.

1.2. Какое наименьшее значение может принимать периметр неравнобедренного треугольника с целыми длинами сторон?

Ответ: 9.

Пусть a, b и c – целые длины сторон треугольника и $a > b > c$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как $a > b > c$, то $a \geq 3$. Если $a = 3$, то $b = 2$, $c = 1$, что невозможно, так как в этом случае не выполняется неравенство треугольника $a < b + c$. Если $a = 4$, то $b + c > 4$, значит, $b = 3$, $c = 2$, а периметр треугольника равен 9. Если $a > 4$, то $b + c > 5$, то есть периметр треугольника не меньше, чем 11.

Второй способ. Запишем неравенство треугольника в таком виде: $c > a - b$. Так как a и b – различные натуральные числа, то $c \geq 2$, значит, $b \geq 3$ и $a \geq 4$. Следовательно, $a + b + c \geq 9$. Равенство достигается для треугольника со сторонам 2, 3 и 4.

1.3. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и –1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

1	**1**	**1**	**–1**	**–1**
1	**–1**	**1**	**–1**	**1**
–1	**1**	**–1**	**1**	**1**
–1	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**
–1	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**

Ответ: пять.

Приведем один из возможных примеров (см. таблицу). Сумма чисел в каждой из трех верхних строк положительна, а сумма чисел в каждом столбце отрицательна.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Найдите все натуральные решения уравнения: $2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}$.

Ответ: $n = 1$.

Первый способ. Преобразуем данное уравнение: $2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n} \Leftrightarrow 2n - 3 = \frac{1}{n^5} - \frac{2}{n}$ $\Leftrightarrow 2n - 3 = \frac{1-2n^4}{n^5}$. При $n = 1$ равенство верно, а при любом другом натуральном значении n левая часть последнего равенства положительна, а правая – отрицательна.

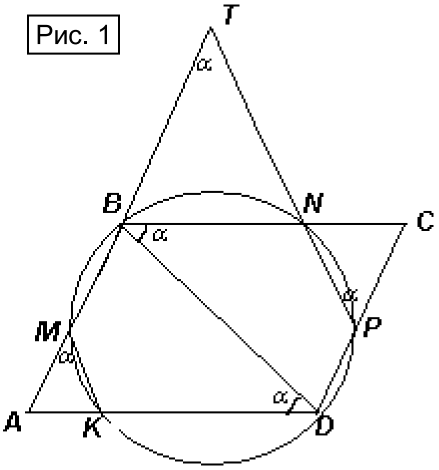
Второй способ. Преобразуем уравнение к виду: $2(n+\frac{1}{n}) = 3 + \frac{1}{n^5}$. Так как при любом $n > 0$ выполняется неравенство $n+\frac{1}{n} \geq 2$, то $2(n+\frac{1}{n}) \geq 4$. Так как n – натуральное число, то $3 + \frac{1}{n^5} \leq 4$. Таким образом, равенство возможно только в том случае, когда обе его части равны четырем, то есть при $n = 1$.

Третий способ. Преобразуем данное уравнение, избавившись от знаменателей, к виду: $2n^6 - 3n^5 + 2n^4 = 1$. Так как n – натуральное число, то левая часть уравнения делится на n, поэтому и правая часть должна делится на n. Следовательно, решением уравнения может являться только $n = 1$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $n = 1$ действительно является решением данного уравнения.

2.2. Окружность проходит через вершины B и D параллелограмма $ABCD$ и пересекает его стороны AB, BC, CD и DA в точках M, N, P и K соответственно. Докажите, что $MK \parallel NP$.

Рис. 1



Пусть $\angle CBD = \angle ADB = \alpha$ (см. рис. 1). Так как $BNPD$ – вписанный четырехугольник, то $\angle CPN = \angle CBD = \alpha$. Аналогично, $BMKD$ – вписанный четырехугольник, значит, $\angle AMK = \angle ADB = \alpha$.

Пусть прямые NP и AB пересекаются в точке T. Тогда, так как $AB \parallel CD$, то $\angle BTN = \angle CPN = \alpha$. Следовательно, $MK \parallel NP$ (по признаку параллельности прямых).

2.3. Делится ли число $21^{10} - 1$ на 2200?

Ответ: да, делится.

Представим число 2200 в виде произведения: $2200 = 22\cdot100 = 22\cdot20\cdot5$. Разложим выражение $21^{10} - 1$ на множители, используя формулу разности квадратов, а также формулы $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$ (справедливо для всех натуральных n) и $a^m + b^m = (a+b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + ... - ab^{m-2} + b^{m-1})$ (справедливо для всех нечетных натуральных m).

Тогда $21^{10} - 1 = (21^5)^2 - 1 = (21^5 - 1)(21^5 + 1) = (21 - 1)(21^4 + 21^3 + 21^2 + 21 + 1)(21 + 1)(21^4 - 21^3 + 21^2 - 21 + 1) = 20\cdot22\cdot(21^4 + 21^3 + 21^2 + 21 + 1)(21^4 - 21^3 + 21^2 - 21 + 1)$.

Заметим, что сумма $21^4 + 21^3 + 21^2 + 21 + 1$ делится на 5, так как она оканчивается цифрой 5. Следовательно, полученное произведение делится на $22\cdot20\cdot5 = 2200$.

Для тех, кто знаком с малой теоремой Ферма и с биномом Ньютона можно предложить еще один способ решения.

Представим число 2200 так: $2200 = 11\cdot200$. Тогда число $21^{10} - 1$ делится на 11 по малой теореме Ферма. Кроме того, по биному Ньютона: $21^{10} - 1 = (1 + 20)^{10} - 1 = 1 + 10\cdot20 + 45\cdot20^2 + 120\cdot20^3 + ... - 1 = 10\cdot20 + 45\cdot20^2 + 120\cdot20^3 + ...$.

В получившейся сумме первое слагаемое равно 200, а каждое слагаемое, начиная со второго, делится на 20^2, значит, эта сумма делится на 200. Таким образом $21^{10} - 1$ делится на 11 и на 200, следовательно, оно делится на 2200 (так как 11 и 200 – взаимно простые числа).

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Какие значения может принимать выражение $(x-y)(y-z)(z-x)$, если известно, что выполняется равенство: $\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$?

Ответ: 0.

Преобразуем исходное равенство: $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{z}$ $\Leftrightarrow$ $\left(\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)^2$ $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{x-y+z}\cdot\sqrt{y}=2\sqrt{x}\cdot\sqrt{z}$. Тогда $(x-y+z)y=xz$ $\Leftrightarrow$ $(xy-y^2)-(xz-yz)=0$ $\Leftrightarrow$ $(y-z)(x-y)=0$. Следовательно, $(x-y)(y-z)(z-x)=0$.

3.2. Существует ли треугольник с вершинами в узлах сетки, у которого центры вписанной и описанной окружностей, точки пересечения высот и медиан также лежат в узлах сетки?

Ответ: да, существует.

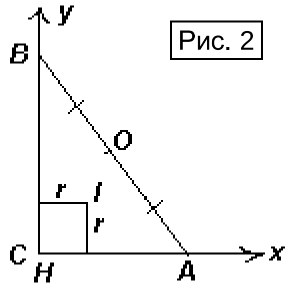


Рис. 2

Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC* в декартовой системе координат так, чтобы точка *C*(0; 0) являлась вершиной прямого угла, а лучи *CA* и *CB* задавали направление осей координат *x* и *y* соответственно (см. рис. 2). Пусть длины катетов пропорциональны сторонам египетского треугольника, то есть *CA* = 3*n*, *CB* = 4*n*, тогда *A*(3*n*; 0), *B*(0; 4*n*). Подберем значение *n* так, чтобы все указанные точки имели целочисленные координаты.

Точка пересечения высот *H* совпадает с вершиной *C*, поэтому *H*(0; 0). Центр описанной окружности *O* является серединой *AB*, следовательно, $O\left(\frac{3n}{2};2n\right)$. Таким образом, *n* должно быть кратно 2.

Центр *I* вписанной окружности будет иметь координаты: *I*(*r*; *r*), где *r* – радиус вписанной окружности. Его можно вычислить, например, по формуле $r=\frac{a+b-c}{2}$. При четном значении *n* длины сторон треугольника – четные, поэтому *r* – целое число.

Координаты точки *M* пересечения медиан являются средним арифметическим соответствующих координат вершин, то есть $M\left(n;\ \frac{4n}{3}\right)$. Следовательно, *n* должно быть кратно 3. Таким образом, *n* кратно 2 и кратно 3, то есть *n* кратно 6.

Если *n* = 6, то треугольник с вершинами C(0; 0), A(18; 0), B(0; 24) удовлетворяет условию задачи: *O*(9; 12), *I*(6; 6), *H*(0; 0), *M*(6; 8).

Существуют и другие примеры.

3.3. Известно, что выражения 4*k* + 5 и 9*k* + 4 при некоторых натуральных значениях *k* одновременно являются точными квадратами. Какие значения может принимать выражение 7*k* + 4 при тех же значениях *k*?

Ответ: 39.

Пусть 4*k* + 5 = m^2 и 9*k* + 4 = n^2, где *m* и *n* – некоторые натуральные числа. Выразим *k* из первого равенства и подставим во второе: $9\cdot\frac{m^2-5}{4}+4=n^2$ $\Leftrightarrow$ $9m^2-4n^2=29$ $\Leftrightarrow$ $(3m-2n)(3m+2n)=29$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}3m-2n=1\\3m+2n=29\end{cases}$, так как 29 – простое число. Единственным решением этой системы является пара чисел *m* = 5, *n* = 7. Тогда *k* = 5, а 7*k* + 4 = 39.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2+b^2}$, если *a* = $\underbrace{55...55}_{2010}$, *b* = $1\underbrace{33...33}_{2009}2$.

Ответ: $1\underbrace{44\ldots44}_{2009}3$.

Пусть $m=\underbrace{11\ldots11}_{2010}$, тогда: $\underbrace{55\ldots55}_{2010}=5m$, $1\underbrace{33\ldots33}_{2009}2=\underbrace{11\ldots11}_{2010}0+\underbrace{22\ldots22}_{2010}=12m$.

Значит, $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25m^2+144m^2}=\sqrt{169m^2}=13m$, $13m=13\cdot\underbrace{11\ldots11}_{2010}=1\underbrace{44\ldots44}_{2009}3$

4.2. На сторонах *AC* и *BC* равностороннего треугольника *ABC* отмечены точки *D* и *E* соответственно так, что $AD=\frac{1}{3}AC$, $CE=\frac{1}{3}CB$. Отрезки *AE* и *BD* пересекаются в точке *F*. Найдите угол *BFC*.

<u>Ответ</u>: 90°.

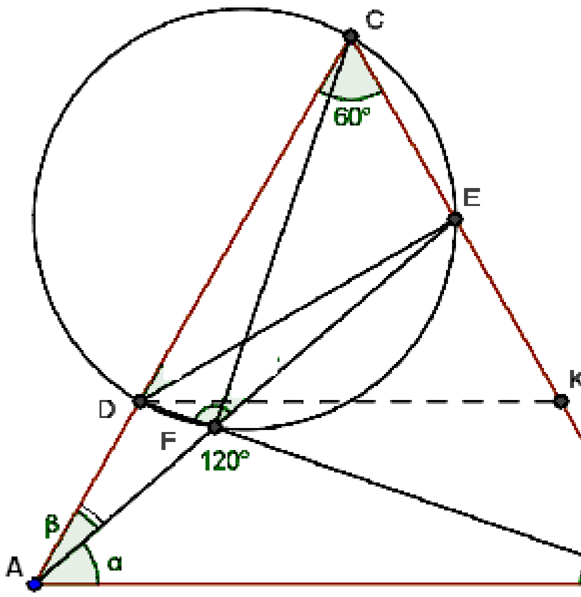


Рис. 3а

<u>Первый способ</u>. Пусть $\angle EAB=\alpha$, а $\angle ABD=\beta$ (см. рис. 3а). Тогда из равенства треугольников *CAE* и *ABD* (по двум сторонам и углу между ними) следует, что $\angle CAE=\angle ABD=\beta$. Значит, $\angle DFE=\angle AFB=180°-(\alpha+\beta)=120°$. Следовательно, $\angle DFE+\angle DCE=180°$, поэтому четырехугольник *ECDF* – вписанный.

На стороне *BC* отметим точку *K* так, что *BK* : *KC* = 1 : 2. Тогда треугольник *CDK* – равносторонний, *DE* – его медиана, которая является и высотой, значит, $\angle CED=90°$.

По свойству вписанных углов $\angle CFD=\angle CED=90°$, следовательно, $\angle BFC=90°$.

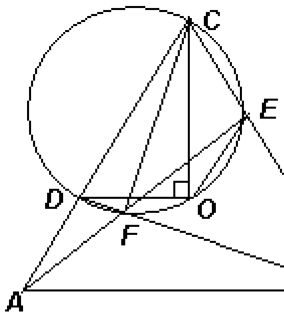


Рис. 3б

<u>Второй способ</u>. Пусть *O* – центр правильного треугольника *ABC*. Тогда *DO* || *AB* и *OE* || *CD*, поэтому $\angle DOE=120°$ и *CDOE* – равнобокая трапеция (см. рис. 3б).

Рассмотрим поворот с центром *O* на угол $\varphi=-120°$. При таком повороте образом вершины *B* является вершина *A*, а образом точки *D* – точка *E*, поэтому образом прямой *BD* является прямая *AE*. Следовательно, $\angle DFE=120°$.

Рассмотрим окружность, описанную около трапеции *CDOE*. Так как $CO\perp DO$, то *CD* – диаметр этой окружности. Так как $\angle DFE=\angle DOE$, то точка *F* лежит на этой окружности, следовательно, $\angle CFD=90°$, тогда $\angle BFC=90°$.

Доказать, что $\angle DFE=120°$ можно также и с помощью векторов.

Пусть $\overline{AB}=\bar b$, $\overline{AC}=\bar c$, *тогда* $\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=\bar c+\frac{1}{3}\overline{CB}=\bar c+\frac{1}{3}(\bar b-\bar c)=\frac{1}{3}\bar b+\frac{2}{3}\bar c$; $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}=\frac{1}{3}\bar c-\bar b$. *Используем, что* $\cos\angle(\overline{AE};\overline{BD})=\dfrac{\overline{AE}\cdot\overline{BD}}{|\overline{AE}|\cdot|\overline{BD}|}$. *Так как* $|\bar b|=|\bar c|=1$, $\angle(\bar b;\bar c)=60^\circ$, *то* $\overline{AE}\cdot\overline{BD}=-\frac{5}{9}\bar b\cdot\bar c-\frac{1}{3}\bar b^2+\frac{2}{9}\bar c^2=-\frac{7}{18}$; $|\overline{AE}|=\sqrt{\overline{AE}^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\bar b^2+\frac{4}{9}\bar b\cdot\bar c+\frac{4}{9}\bar c^2}=\frac{\sqrt7}{3}$; $|\overline{BD}|=\sqrt{\overline{BD}^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\bar c^2-\frac{2}{3}\bar b\cdot\bar c+\bar b^2}=\frac{\sqrt7}{3}$. *Таким образом,* $\cos\angle DFE=-\frac{7}{18}:\frac{7}{9}=-\frac{1}{2}$, *значит,* $\angle DFE=120°$.

4.3. Имеется 200 гирек массами 1, 2, …, 200 грамм. Их разложили на две чаши весов по 100 гирек на каждую, и весы оказались в равновесии. На каждой гирьке записали, сколько гирек на противоположной чаше легче нее. Докажите, что сумма чисел, записанных на гирьках левой чаши, равна сумме чисел, записанных на гирьках правой чаши.

Для каждой гирьки рассмотрим общее количество тех гирек, которые легче нее. Если масса гирьки равна m, то для нее таких гирек будет (m – 1). Так как весы находятся в равновесии, то для обеих чаш весов суммы S таких чисел одинаковы, а именно, на 100 меньше, чем сумма масс гирек на чаше (*можно подсчитать, что сумма масс гирек на каждой чаше равна* $\frac{1+200}{2}\cdot 100$ *= 10050, а S = 9950*).

На каждой чаше упорядочим гирьки по массе и для каждой из них рассмотрим количество тех гирек, которые легче нее и лежат на этой же чаше. Для самых легких гирь это число будет равно 0 (на каждой чаше), для следующих по массе это число равно 1 (на каждой чаше), и так далее. Поскольку все гирьки имеют различные массы и на каждой чаше – одинаковое количество гирек, то и суммы Q таких чисел для обеих чаш одинаковы (*Q = 0 + 1 + 2 + ... + 99 = 99·50 = 4950 для каждой чаши*).

Сумма чисел, записанных на гирьках каждой чаши равна $S – Q$, то есть одинакова (*S – Q = 5000 для каждой чаши*).

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Известно, что $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=3$. Найдите значение выражения $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

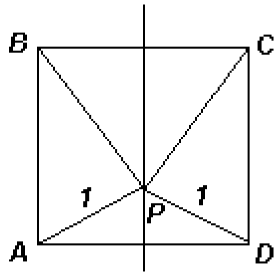
Ответ: $2\frac{1}{6}$.

Первый способ. Приведем к общему знаменателю левую часть данного равенства: $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}$. Следовательно, $\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}=3$, откуда $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{3}{2}$. Тогда $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}$

Второй способ. Заметим, что $y \neq 0$, так как при $y = 0$ равенство в условии задачи не выполняется. Тогда разделим почленно числитель и знаменатель каждой дроби в левой части данного равенства на y и введем обозначение: $\frac{x}{y}=t$. Получим: $\frac{t+1}{t-1}+\frac{t-1}{t+1}=3$. Решениями этого уравнения являются $t=\pm\sqrt{5}$. Тогда $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ = $\frac{t^2+1}{t^2-1}+\frac{t^2-1}{t^2+1}$ = $\frac{6}{4}+\frac{4}{6}$ = $\frac{13}{6}$.

5.2. На плоскости дан квадрат и точка P. Могут ли расстояния от точки P до вершин квадрата оказаться равными 1, 1, 2 и 3?

Рис. 4а



Ответ: нет, не могут.

Пусть дан квадрат $ABCD$. Рассмотрим два случая: равны расстояния от точки P 1) до соседних вершин квадрата; 2) до противоположных вершин квадрата.

Первый способ. 1) Пусть $PA = PD = 1$. Тогда точка P лежит на серединном перпендикуляре к стороне AD (см. рис. 4а), поэтому $PB = PC$, что противоречит условию задачи.

2) Пусть $PA = PC = 1$. Тогда точка P лежит на серединном перпендикуляре к диагонали AC, то есть на прямой BD, и $PB = 2$ (см. рис. 4 б, в). При этом, если точка P – вне квадрата (см. рис. 4б), то это противоречит тому, что угол ABP – тупой, а если точка P – внутри квадрата (см. рис. 4в), то $AC = BD = 5$, что противоречит неравенству треугольника $AC < PA + PC$.

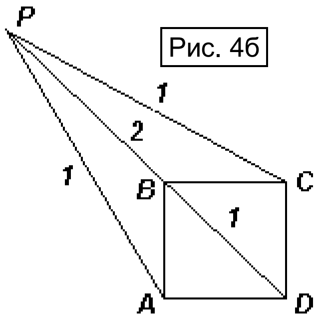


Рис. 4б

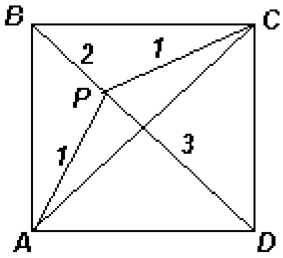


Рис. 4в

Второй способ. Используем, что для любого прямоугольника $ABCD$ и произвольной точки P должно выполняться равенство $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. Доказать его можно, например, так: пусть O – точка пересечения диагоналей прямоугольника (см. рис. 4г), тогда треугольники PAC и PBD имеют общую медиану PO. По формуле для вычисления медианы треугольника (*которую, можно получить, например, из теоремы о сумме квадратов диагоналей параллелограмма*): $PO^2 = \dfrac{2PA^2 + 2PC^2 - AC^2}{4}$ и $PO^2 = \dfrac{2PB^2 + 2PD^2 - BD^2}{4}$. Приравнивая правые части и учитывая, что $AC = BD$, получим требуемое равенство.

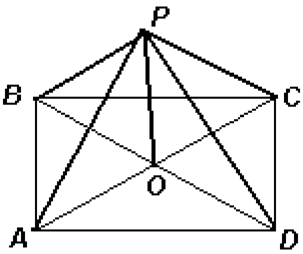


Рис. 4г

При подстановке данных в полученное равенство можно убедиться в том, что ни один из двух случаев невозможен.

Отметим, что доказанное равенство справедливо и в том случае, когда точка P не лежит в плоскости прямоугольника ABCD.

5.3. Несколько школьников ходило за грибами. Вася собрал больше всех и это составило $\frac{1}{5}$ от общего количества грибов, а Петя собрал меньше всех и это составило $\frac{1}{7}$ от общего количества. Сколько могло быть школьников?

Ответ: 6 человек.

Первый способ. Пусть за грибами ходило n школьников, тогда каждый из них в среднем собрал $\frac{1}{n}$ часть от общего количества грибов. Так как среднее арифметическое любого набора чисел, среди которых не все числа одинаковые, меньше наибольшего числа этого набора и больше наименьшего, то $\frac{1}{5} > \frac{1}{n} > \frac{1}{7}$, откуда $n = 6$.

Второй способ. Из условия задачи следует, что количество собранных грибов кратно 35. Пусть оно равно $35k$, где k – натуральное число, тогда Вася собрал $7k$ грибов, а Петя собрал $5k$. Следовательно, остальные m человек собрали $23k$ грибов.

Докажем, что $m = 4$. Действительно, если $m \ge 5$, то они бы собрали не менее, чем $5 \cdot 5k = 25k$ грибов, а если $m \le 3$, то они бы собрали не более, чем $3 \cdot 7k = 21k$ грибов. При $m = 4$ описанная ситуация возможна, например, $23k = 6k + 6k + 5{,}5k + 5{,}5k$, где k – четное число.

Математическая регата 9 классов 06.10.2012

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Решите уравнение: $\dfrac{\left(\sqrt{-x}\right)^2+\sqrt{x^2}}{2x^2}=2012$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2012}$

Выражение, стоящее в левой части данного уравнения, имеет смысл только при x < 0. После упрощения уравнение примет вид: $\dfrac{-x+|x|}{2x^2}=2012$. Так как при x < 0 $|x|$ = $-x$, то $x=-\dfrac{1}{2012}$.

1.2. Существует ли трапеция, в которой каждая диагональ разбивает ее на два равнобедренных треугольника?

Ответ: да, существует.

Например, равнобокая трапеция, у которой меньшее основание равно боковой стороне, а большее основание равно диагонали (см. рис. 1).

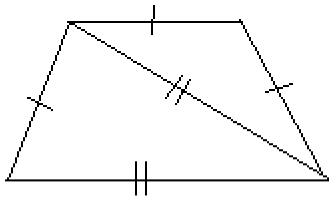


Рис. 1

Несложно доказать, что искомая трапеция определяется однозначно с точностью до подобия: ее углы равны 72° и 108°.

1.3. Может ли произведение трех трехзначных чисел, для записи которых использовано девять различных цифр, оканчиваться четырьмя нулями?

Ответ: да, может.

Например, 125·360·748 = 33660000.

Приведенный пример – не единственный, но в любом примере один из множителей должен делится на 125. Отметим, что такое произведение может оканчиваться даже ***пятью нулями****: 625·480·137 = 41100000.*

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Три фирмы A, B и C решили совместно построить дорогу длиной 16 км, договорившись финансировать этот проект поровну. В итоге, A построила 6 км дороги, B построила 10 км, а C внесла свою долю деньгами – 16 миллионов рублей. Каким образом фирмы A и B должны разделить эти деньги между собой?

Ответ: фирме A – 2 миллиона, а фирме B – 14 миллионов рублей.

Каждая фирма должна была построить $\dfrac{16}{3}$ км дороги. Вместо фирмы C фирма A построила $6-\dfrac{16}{3}=\dfrac{2}{3}$ км дороги, а фирма B построила $10-\dfrac{16}{3}=\dfrac{14}{3}$ км. Поэтому 16 миллионов рублей надо разделить между ними в отношении 2 : 14.

2.2. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, пересекающая отрезок PQ, последовательно пересекает эти окружности в точках A, B, C и D. Докажите, что $\angle APB=\angle CQD$.

Проведем отрезок PQ и отметим две пары равных вписанных углов: $\angle PBD=\angle PQD$ и $\angle PAB=\angle PQC$ (см. рис. 2). Тогда, используя для треугольника PAB теорему о внешнем угле, получим: $\angle APB=\angle PBD-\angle PAB=\angle PQD-\angle PQC=\angle CQD$

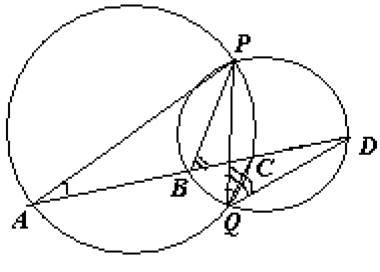


Рис. 2

2.3. В круговом шахматном турнире участвует 9 мальчиков и 3 девочки (каждый играет с каждым один раз, победа – 1 очко; ничья – 0,5; поражение – 0). Может ли в итоге оказаться, что сумма очков, набранных всеми мальчиками, будет равна сумме очков, набранных всеми девочками?

<u>Ответ</u>: нет, не может.

Сумма всех набранных очков равна общему количеству сыгранных партий: $\frac{12 \cdot 11}{2}$ = 66. Предположим, что суммы очков, набранных мальчиками и девочками, равны, тогда девочки должны в сумме набрать 33 очка. Один участник не может набрать больше, чем 11 очков, значит, каждая из девочек набрала ровно 11. Но во встречах между собой кто-то из девочек обязательно «потерял» очки, то есть не смог набрать максимум очков.

Ту же идею можно реализовать иначе. Если даже каждая девочка выиграет у каждого из мальчиков, то в сумме девочки наберут 27 очков. Еще 3 партии они проводят между собой и в любом случае наберут в сумме 3 очка. Таким образом, более, чем 30 очков в сумме девочки набрать не могут, а это меньше половины всех очков, разыгрываемых в турнире.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $ab + bc + ca \geq 12$, то $a + b + c \geq 6$.

Воспользуемся тем, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Тогда $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca) \geq 36$. Учитывая, что $a + b + c > 0$, получим: $a + b + c \geq 6$, что и требовалось.

Можно также действовать методом «от противного». Предположим, что найдутся такие положительные a, b и c, что $a + b + c < 6$. Тогда, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) < 36$. Так как $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, то $3(ab + bc + ca) < 36$, то есть $ab + bc + ca < 6$ – противоречие.

3.2. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* биссектрисы углов *CAD* и *CBD* пересекаются на стороне *CD*. Докажите, что биссектрисы углов *ACB* и *ADB* пересекаются на стороне *AB*.

Пусть *K* – точка на стороне *CD*, в которой пересекаются биссектрисы углов *CAD* и *CBD* (см. рис. 3). Тогда, по свойству биссектрисы треугольника, выполняются равенства: $\frac{CK}{DK} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$. Следовательно, $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$.

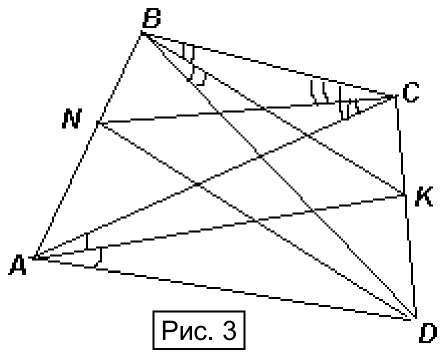


Рис. 3

Пусть биссектриса угла *ACB* пересекает сторону *AB* в точке *N*, тогда $\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$. Используя теперь утверждение, обратное свойству биссектрисы, получим, что *DN* – биссектриса угла *ADB*.

3.3. Может ли число $(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y + 1)^2$ при каких-то целых *x* и *y* оказаться точным квадратом?

<u>Ответ</u>: нет, не может.

Так как $x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$, то при любых целых *x* и *y* значение каждого из выражений в скобках – нечетное число. Квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1, поскольку $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$. Таким образом, значение данного выражения является четным числом и при делении на 4 дает остаток 2.

Пусть оно является точным квадратом, тогда это квадрат четного числа. Но квадрат любого четного числа делится на 4 – противоречие.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Известно, что модули корней каждого из двух квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ меньше десяти. Может ли трехчлен $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2}$ иметь корни, модули которых не меньше десяти?

Ответ: нет, не может.

Заметим, что графики всех трех трехчленов являются параболами, у которых «ветви» направлены вверх. Тогда, из условия задачи следует, что при $|x| \geq 10$ каждый из двух данных трехчленов принимает положительные значения. Следовательно, для таких значений x: $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = \frac{1}{2}((x^2 + ax + b) + (x^2 + cx + d)) > 0$.

Следовательно, график этого трехчлена либо целиком лежит выше оси x, либо пересекает эту ось в одной или двух точках, лежащих между –10 и 10. В первом случае, этот трехчлен не имеет корней, а во втором – модули его корней меньше десяти.

4.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и высота BE. Докажите, что $\angle CED > 45°$.

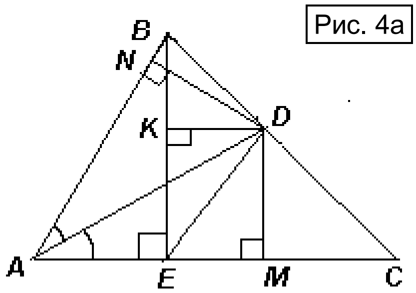


Рис. 4а

Первый способ. Из точки D опустим перпендикуляры DM и DN на прямые AC и AB соответственно (см. рис. 4а). Так как AD – биссектриса, то $DM = DN$, кроме того оба перпендикуляра лежат внутри треугольника ABC, поскольку он остроугольный. Проведем также перпендикуляр DK к высоте BE, тогда $DMEK$ – прямоугольник. Так как $DM = DN > DK$, то $\angle CED > 45°$, что и требовалось.

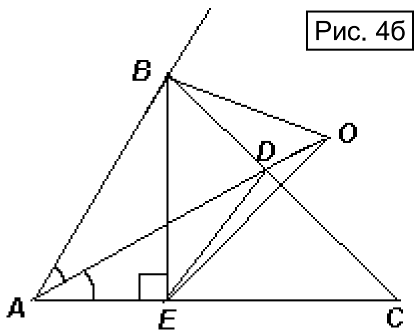


Рис. 4б

Второй способ. Проведем биссектрису прямого угла BEC (см. рис. 4б). Пусть она пересечет луч AD в точке O. Так как $\angle CEO = 45°$, то для доказательства требуемого неравенства достаточно показать, что $\angle CED > \angle CEO$, то есть, что точка O лежит вне треугольника ABC.

Заметим, что O – центр вневписанной окружности треугольника ABE, так как является пересечением его внутренней и внешней биссектрис. Значит, BO – также биссектриса внешнего угла этого треугольника.

Тогда $\angle ABO = \angle ABE + \angle OBE = 90° - \angle A + \frac{1}{2}(90° + \angle A) = 135° - \frac{1}{2}\angle A > 90° > \angle B$, так как углы A и B треугольника ABC – острые. Следовательно, точка O действительно лежит вне треугольника ABC.

Также можно, обозначив точку пересечения EO и BC через F и используя свойство биссектрисы треугольника и тригонометрические функции, доказать, что $\frac{BD}{DC} < \frac{BF}{FC}$, *откуда и будет следовать утверждение задачи.*

4.3. На тарелке лежат 9 разных кусков сыра. Всегда ли можно разрезать не более одного из кусков на две части так, чтобы получившиеся 10 кусков сыра можно было разложить на две порции равной массы по 5 кусков в каждой?

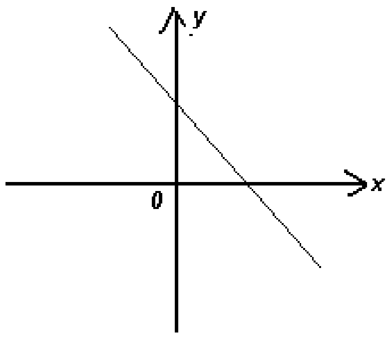
Ответ: всегда.

Упорядочим данные куски сыра по возрастанию массы: $m_1 < m_2 < \ldots < m_8 < m_9$. Тогда, $S_1 = m_1 + m_3 + m_5 + m_7 < m_2 + m_4 + m_6 + m_8 = S_2$, а $S_1 + m_9 > S_2$ (так как $m_9 > m_8$, $m_7 > m_6$, $m_5 > m_4$, $m_3 > m_2$). Следовательно, можно разрезать самый тяжелый кусок на две части с массами k и n так, чтобы $S_1 + k = S_2 + n$. Тем самым условие задачи будет выполнено.

Отметим, что возможность разрезать кусок сыра в любом заданном отношении масс следует, строго говоря, из соображений непрерывности. Несложно также указать конкретные значения n и k: $n = \dfrac{S_1 + m_9 - S_2}{2}$; $k = S_2 - S_1 + n = \dfrac{S_2 + m_9 - S_1}{2}$.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. На координатной плоскости задан график функции $y = kx + b$ (см. рисунок). В той же координатной плоскости схематически постройте график функции $y = kx^2 + bx$. Решение поясните.



Ответ: см. рис. 5.

Запишем формулу квадратичной функции в виде: $y = x(kx + b)$. Ее графиком является парабола.

1) Заметим, что один из нулей квадратичной функции совпадает с нулем функции $y = kx + b$, а другой: $x = 0$.

2) График расположен «ветвями» вниз, так как $k < 0$.

Таким образом, искомая парабола проходит через начало координат и точку пересечения прямой $y = kx + b$ с осью абсцисс; она расположена «ветвями» вниз симметрично относительно серединного перпендикуляра к отрезку, концы которого – нули этой функции.

Отметим, что одним из корней уравнения $x(kx + b) = kx + b$ является $x = 1$, поэтому можно указать абсциссу второй точки пересечения данного и искомого графиков.

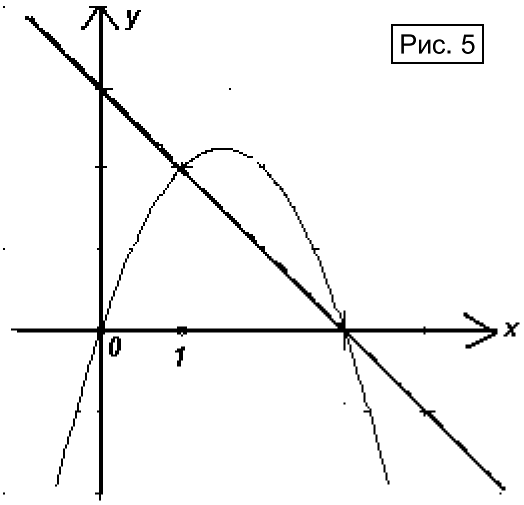
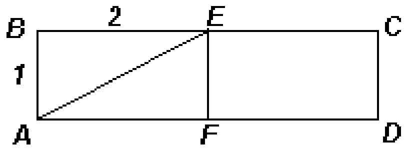


Рис. 5

5.2. Длина прямоугольного участка равна 4 метра, а ширина – 1 метр. Можно ли посадить на нем три дерева так, чтобы расстояние между любыми двумя деревьями было не меньше, чем 2,5 метра?

Рис. 6



Ответ: нет, нельзя.

Пусть это не так, тогда разобьем данный участок *ABCD* на два прямоугольника размером 2×1 (см. рис. 6). По принципу Дирихле, хотя бы в одном из прямоугольников *ABEF* или *DCEF* должны тогда расти, по крайней мере, два дерева. Две наиболее удаленные точки прямоугольника это концы его диагонали. Но ее длина: $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{5} < 2{,}5$, то есть расстояние между двумя деревьями будет меньше, чем 2,5 метра, что противоречит условию.

5.3. На поляне пасутся 150 коз. Поляна разделена изгородями на несколько участков. Ровно в полдень некоторые козы перепрыгнули на другие участки. Пастух подсчитал, что на каждом участке количество коз изменилось, причем ровно в семь раз. Не ошибся ли он?

Ответ: пастух ошибся.

Пусть x – количество коз на тех участках, где их число увеличилось в 7 раз, а y – количество коз на тех участках, где их число уменьшилось в 7 раз. Тогда имеет место система уравнений: $\begin{cases} x + y = 150 \\ 7x + \dfrac{y}{7} = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 150 \\ 49x + y = 1050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 150 \\ 48x = 900 \end{cases}$. Полученная система не имеет натуральных решений (так как второе уравнение не имеет натуральных решений).

Полученное противоречие показывает, что пастух ошибся.

Математическая регата 9 классов 5.10.2013

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Прямые $y = kx + b$, $y = 2kx + 2b$ и $y = bx + k$ различны и пересекаются в одной точке. Какими могут быть ее координаты?

Ответ: (1; 0).

Из уравнения первой прямой следует, что $2y = 2kx + 2b$, тогда из первых двух уравнений получим, что $2y = y$, то есть $y = 0$. Из первого и третьего уравнения получим, что $kx + b = bx + k \Leftrightarrow x(k - b) = k - b$. Если $k = b$, то эти прямые совпадают, что противоречит условию. Следовательно, $x = 1$. Таким образом, другой общей точки, кроме (1; 0), заданные три прямые иметь не могут.

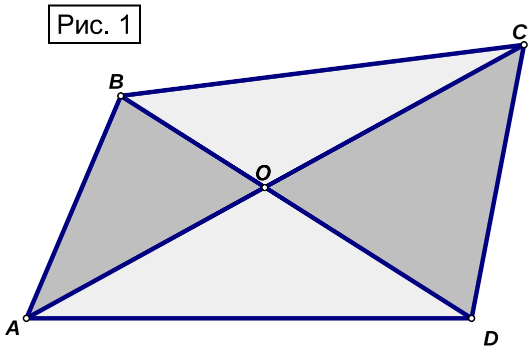
Подставив $x = 1$, $y = 0$ в каждое из уравнений, получим одно и то же равенство $k + b = 0$. Это означает, что при $k = -b$ прямые действительно пересекаются в указанной точке.

Возможны и другие способы решения, например, составить систему из трех уравнений и решить ее относительно переменных x, y и k (или b).

1.2. Существует ли выпуклый четырехугольник, у которого каждая диагональ не больше, чем любая сторона?

Ответ*:* нет, не существует.

Рис. 1



Первый способ. В любом выпуклом четырехугольнике $ABCD$ хотя бы один угол не меньше, чем 90°. Пусть, например, это угол ABC (см. рис. 1). Тогда в треугольнике ABC диагональ AC четырехугольника является наибольшей стороной, то есть $AC > AB$ и $AC > BC$. Таким образом, четырехугольника, указанного в условии задачи, не существует.

Второй способ. Пусть O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 1). Для каждого из треугольников AOB, BOC, COD и DOA запишем неравенство треугольника: $OA + OB > AB$, $OB + OC > BC$, $OC + OD > CD$ и $OD + OA > DA$. Сложив эти неравенства почленно, получим: $2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA$. Если же предположить, что любая диагональ не больше любой из сторон, то $AC + AC + BD + BD \le AB + BC + CD + DA$. Полученное противоречие показывает, что искомого четырехугольника не существует.

1.3. Можно ли в клетки таблицы размером 4×4 вписать по целому числу так, чтобы сумма всех чисел таблицы была положительной, а сумма чисел в каждом квадрате размера 3×3 была отрицательной?

Ответ: да, можно.

Заметим, что центральный квадрат размера 2×2 содержится в любом квадрате размера 3×3. Поставим, например, в одну из клеток центрального квадрата число –10, а остальные клетки данной таблицы заполним единицами. Тогда сумма всех чисел таблицы равна 15 + (–10) = 5, а сумма чисел внутри любого квадрата размера 3×3 равна 8 + (–10) = –2.

Существуют и другие примеры.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Докажите, что если $a \le 1$, $b \le 1$ и $a + b \ge 0{,}5$, то $(1 - a)(1 - b) \le \frac{9}{16}$.

Первый способ. Из условия задачи следует, что $1 - a \ge 0$ и $1 - b \ge 0$. Тогда по неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим:

$\sqrt{(1-a)(1-b)} \le \frac{(1-a)+(1-b)}{2}$ = $=1-\frac{a+b}{2} \le \frac{3}{4}$. Возведя в квадрат обе части неравенства $\sqrt{(1-a)(1-b)} \le \frac{3}{4}$, получим требуемое неравенство.

Эту же идею можно реализовать, действуя методом «от противного».

Второй способ. Пусть $1 - a = x \ge 0$, $1 - b = y \ge 0$, тогда $x + y = 2 - (a + b) \le \frac{3}{2}$. Следовательно, $xy \le x(\frac{3}{2} - x)$. Квадратичная функция $f(x) = x(\frac{3}{2} - x)$ достигает наибольшего значения при $x = \frac{3}{4}$ и это значение равно $\frac{9}{16}$. Значит, $xy \le \frac{9}{16}$, что и требовалось.

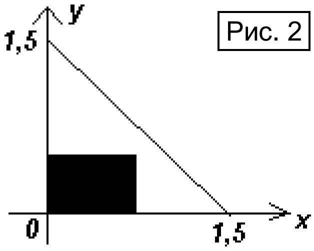


Рис. 2

У этого способа решения есть естественная геометрическая интерпретация. Неравенства $x \ge 0$, $y \ge 0$ и $x + y \le \frac{3}{2}$ задают на координатной плоскости прямоугольный равнобедренный треугольник площади $\frac{3}{8}$ (см. рис. 2). Рассмотрим произвольный прямоугольник с вершиной в начале координат и сторонами, параллельными осям координат, который лежит внутри этого треугольника. Доказанное неравенство показывает, что его площадь xy не превосходит половины площади треугольника. Это утверждение останется верным и при замене $\frac{3}{2}$ на любое положительное число.

2.2. В треугольнике ABC угол C равен 135°. На стороне AB вне треугольника построен квадрат с центром O. Найдите OC, если $AB = 6$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

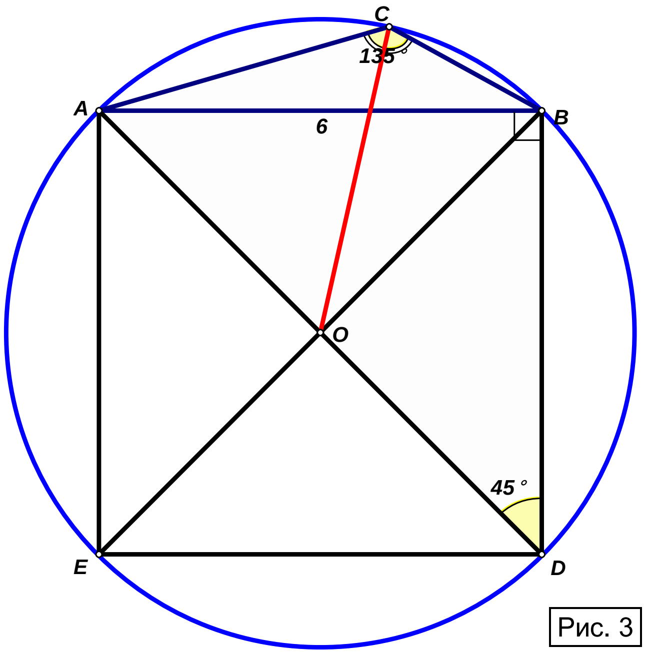


Рис. 3

Пусть $ABDE$ – построенный квадрат. Его диагональ образует со стороной угол 45°, значит, $\angle ACB + \angle ADB = 180°$ (см. рис. 3). Следовательно, около четырехугольника $ACBD$ можно описать окружность. Так как угол ABD, вписанный в эту окружность, прямой, то центр O окружности является серединой диагонали AD квадрата, то есть его центром.

Тогда OC – радиус этой окружности. Таким образом, $OC = \frac{1}{2}AD = 3\sqrt{2}$.

Обосновать, что точа C лежит на окружности, описанной около квадрата, можно и по-другому. Проведя эту окружность, заметим, что ее центральный угол AOB – прямой, значит, вписанный угол, опирающийся на ту же дугу равен 45°. Следовательно, дополняющая ее дуга той же окружности принадлежит ГМТ, из которых хорда AB видна под углом 135°.

2.3. Перемножили несколько натуральных чисел и получили 224, причем самое маленькое число было ровно вдвое меньше самого большого. Сколько чисел перемножили?

Ответ: три.

Разложим данное число на простые множители: $224 = 2^5 \cdot 7$. Рассмотрим два числа, указанные в условии: самое маленькое и самое большое. Если одно из них делится на 7, то и другое должно делиться на 7. Но 224 не делится на 7^2, значит, оба этих числа являются степенями двойки. Из условия также следует, что это – две последовательные степени числа 2. Кроме того, самое большое число должно быть больше, чем 7. Таким образом, оно равно $2^3 = 8$, а самое маленькое – это $2^2 = 4$. Остался единственный множитель, равный семи, поэтому искомых чисел три: 4, 7 и 8.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. По дорожке стадиона длиной 400 метров из одной точки в одном направлении выбегают три спортсмена с постоянными скоростями 12 км/ч, 15 км/ч и 17 км/ч. Найдите, через какое наименьшее время спортсмены поравняются.

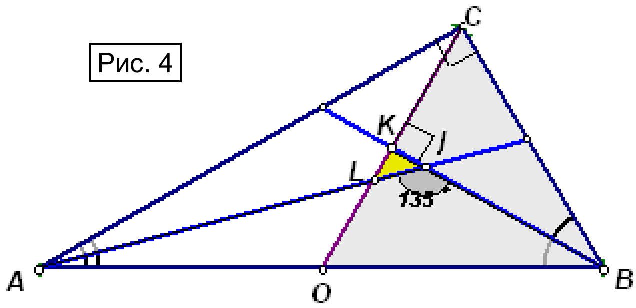
Ответ: через 24 минуты.

Скорость, с которой второй спортсмен удаляется от первого, равна 3 км/ч = $\frac{1}{8}$ круга за минуту, а скорость, с которой третий бегун удаляется от первого, равна 5 км/ч = $\frac{5}{24}$ круга за минуту. Пусть в первый момент, когда спортсмены поравнялись, второй опередил первого на n кругов, а третий – на m кругов. Тогда искомое время $t = 8n = \frac{24}{5}m$.

Таким образом, $5n = 3m$. Наименьшее натуральное решение этого уравнения: $n = 3$, $m = 5$. Значит, $t = 24$.

3.2. В треугольнике ABC из вершин A и B проведены биссектрисы, а из вершины C – медиана. Оказалось, что точки их попарного пересечения образуют прямоугольный равнобедренный треугольник. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 90°, 60° и 30°.



Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, а его медиана CO пересекает проведенные биссектрисы в точках K и L (см. рис. 4). Так как $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle C > 90°$, то в полученном треугольнике KLI угол при вершине I прямым быть не может. Тогда из условия задачи следует, что $\angle AIB = 135°$, поэтому $\angle ACB = 90°$. Следовательно, $OC = OA = OB$, то есть треугольники AOC и BOC – равнобедренные.

Без ограничения общности можно считать, что прямым в треугольнике KLI является угол при вершине K. Тогда в треугольнике BOC высота BK совпадает с биссектрисой, поэтому $OB = BC$. Таким образом, треугольник BOC – равносторонний. Следовательно, $\angle ABC = 60°$, значит, $\angle BAC = 30°$.

3.3. На острове 100 рыцарей и 100 лжецов. У каждого из них есть хотя бы один друг. Однажды ровно 100 человек сказали: «Все мои друзья – рыцари», и ровно 100 человек сказали : «Все мои друзья – лжецы». Каково наименьшее возможное количество пар друзей, один из которых рыцарь, а другой лжец?

Ответ: 50.

Докажем, что таких пар не меньше, чем 50. Рассмотрим какого-нибудь жителя A острова, утверждающего: «Все мои друзья – лжецы». Если A – рыцарь, то у него есть друг – лжец, значит, есть хотя бы одна пара друзей, в которой один – рыцарь, а другой – лжец. Если A – лжец, то у него есть друг – рыцарь, то есть и в этом случае есть хотя бы одна такая пара. В обоих случаях, сам A – один из этой пары. Так как такое высказывание сделали 100 человек, то количество пар не может быть меньше, чем 100 : 2 = 50.

Возможный пример: пусть 50 рыцарей дружат между собой, 50 лжецов дружат между собой и есть 50 пар вида «рыцарь – лжец», причем больше друзей у жителей из этих пар нет. Тогда любой из первых двух групп вправе сказать: «Все мои друзья – рыцари», а любой из третьей группы: «Все мои друзья – лжецы».

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Числа *x*, *y* и *z* таковы, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$. Какие значения может принимать выражение $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$?

Ответ: 0.

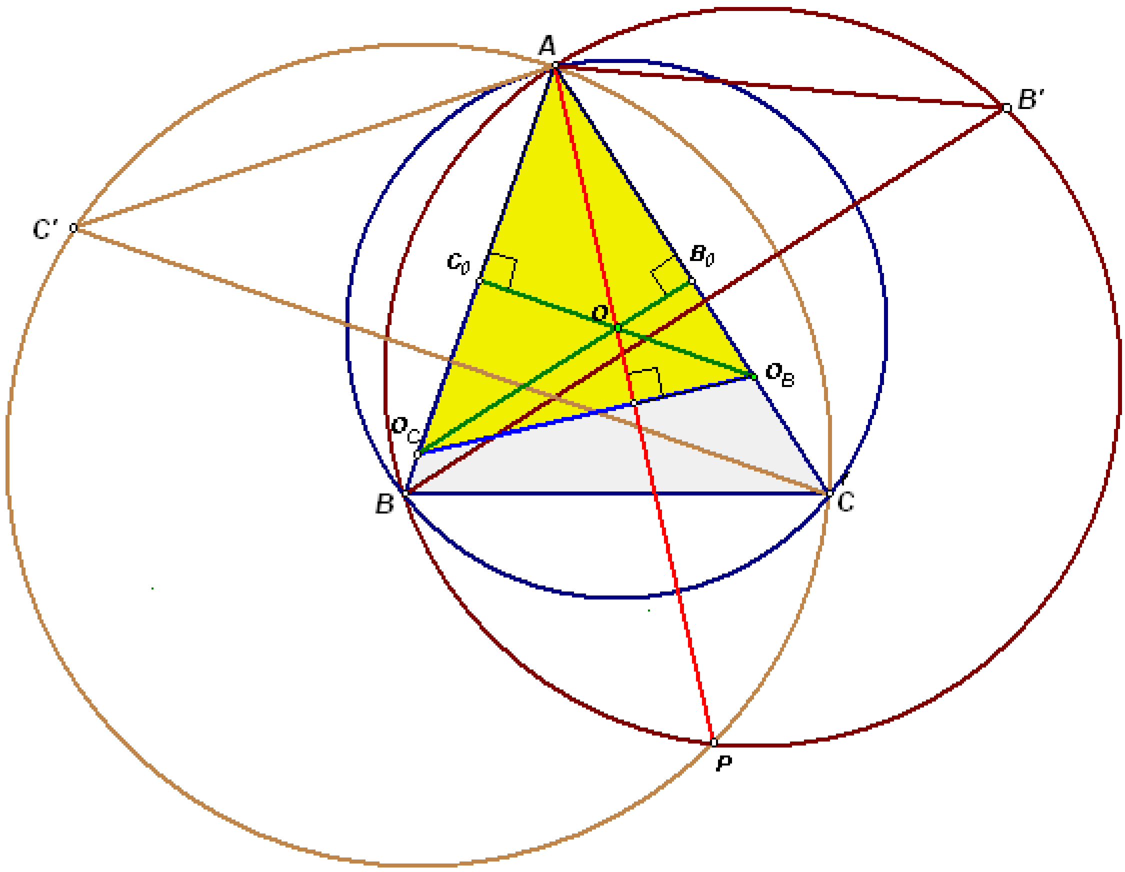
Заметим, что $\frac{x^2}{y+z}+x$ = $\frac{x^2+xy+xz}{y+z}$ = $\frac{x}{y+z}(x+y+z)$. Аналогично, $\frac{y^2}{z+x}+y$ = $\frac{y}{z+x}(x+y+z)$ и $\frac{z^2}{x+y}+z$ = $\frac{z}{x+y}(x+y+z)$.

Сложим почленно три полученных равенства, введя следующие обозначения: $A=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$, $B=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$ и вынося за скобки в правой части выражение $x + y + z$. Тогда $B + (x + y + z) = (x + y + z)A$. По условию $A = 1$, поэтому $B = 0$.

Отметим, что вопрос существования чисел x, y и z, удовлетворяющих условию, в данной задаче не рассматривается.

4.2. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Точки *B*' и *C*' симметричны его вершинам *B* и *C* относительно прямых *AC* и *AB* соответственно. Окружности, описанные около треугольников *ABB*' и *ACC*' вторично пересекаются в точке *P*. Докажите, что прямая *AP* проходит через центр окружности, описанной около *ABC*.

Рис. 5



Так как AC является серединным перпендикуляром к отрезку BB', то центр O_B окружности, описанной около треугольника ABB', лежит на прямой AC. Аналогично, центр O_C окружности, описанной около треугольника ACC', лежит на прямой AB (см. рис. 5).

Проведем окружность с центром O, описанную около треугольника ABC. Общей хордой этой окружности и окружности ACC' является отрезок AB, поэтому линия центров OO_B является серединным перпендикуляром к AB. Аналогично, OO_C – серединный перпендикуляр к стороне AC. Обозначив точки пересечения OO_B с AB и OO_C с AC через C_0 и B_0 соответственно, получим, что O_BC_0 и O_CB_0 являются высотами треугольника AO_BO_C, а точка O их пересечения – ортоцентром этого треугольника.

Отрезок AP является общей хордой двух окружностей, указанных в условии задачи, значит, он перпендикулярен их линии центров O_BO_C. Следовательно, прямая AP содержит третью высоту треугольника AO_BO_C, поэтому AP проходит через точку O.

4.3. На экране компьютера – число 141. Каждую секунду компьютер перемножает все цифры числа на экране, полученное произведение либо прибавляет к этому числу, либо вычитает из него, а результат появляется на экране вместо исходного числа. Появится ли еще когда-нибудь на экране число 141?

Ответ: нет, не появится.

На первом шаге на экране появится либо число 145, либо число 137.

В первом случае число 141 никогда появиться не сможет, так как если число на экране оканчивается на 5, то произведение его цифр кратно пяти. Поэтому из числа, оканчивающегося на 5, можно получить только число, оканчивающееся на 5 или на 0. Если же число оканчивается на 0, то оно в дальнейшем не изменяется.

Во втором случае на следующем шаге возникнет либо число 158, либо число 116. Но произведение цифр четного числа всегда четно, поэтому из четного числа можно получить на экране только четное. А так как 141 – число нечетное, то и в этом случае его получить не удастся.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Верно ли, что $2^{62} + 1$ делится на $2^{31} + 2^{16} + 1$?

Ответ: да, верно.

Пусть $2^{15} = a$. Тогда $2^{62} + 1 = 4a^4 + 1 = (4a^4 + 4a^2 + 1) – 4a^2 = (2a^2 + 1)^2 – (2a)^2 = (2a^2 + 2a + 1)(2a^2 – 2a + 1) = (2^{31} + 2^{16} + 1)(2^{31} – 2^{16} + 1)$.

Следовательно, $2^{62} + 1$ делится на $2^{31} + 2^{16} + 1$.

Эту же идею (разложение на множители с помощью выделения квадрата двучлена) можно реализовать непосредственно, не прибегая к замене.

5.2. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ отметили точки E и F, так что $AFCE$ – ромб. Известно, что $AB = 16$, $BC = 12$. Найдите EF.

Ответ: 15.

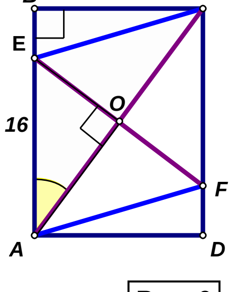


Рис. 6

Из условия задачи следует, что прямоугольник и ромб имеют общий центр симметрии O. Кроме того, из прямоугольного треугольника ABC получим, что $AC = 20$ (см. рис. 6). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Также из треугольника ABC: $\operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{4}$.

Тогда из треугольника OAE: $OE = AO\cdot \operatorname{tg}\angle BAC = 7{,}5$; $EF = 2OE = 15$.

Второй способ. Пусть $AE = EC = x$, тогда $BE = 16 – x$. Из прямоугольного треугольника CBE: $x^2 = 12^2 + (16 – x)^2$. Отсюда $x = 12{,}5$. Из прямоугольного треугольника COE: $OE^2 = EC^2 – CO^2 = 7{,}5^2$; тогда $EF = 2OE = 15$.

5.3. В классе 33 ученика, всем вместе 430 лет. Докажите, что если выбрать 20 самых старших из них, то им вместе будет не меньше, чем 260 лет. (*Возраст любого ученика – целое число*.)

Пусть это не так, то есть двадцати самым старшим в сумме – меньше, чем 260 лет. Тогда тринадцати остальным (самым младшим) – более 170 лет. Так как $13 \cdot 13 = 169$, то среди них найдется хотя бы один, которому не менее четырнадцати лет (по принципу Дирихле). Но тогда каждому из двадцати самых старших не может быть меньше, чем 14 лет. Следовательно, вместе им не меньше, чем $14 \cdot 20 = 280$ лет.

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Математическая регата 9 классов 4.10.2014

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. Решите уравнение: $x(x + 1) = 2014 \cdot 2015$.

Ответ: 2014; –2015.

Решение. Так как каждая часть уравнения представляет собой произведение двух последовательных чисел, то оба корня подбираются исходя из предположения, что они целые, а их модули могут быть равны 2014 или 2015. Данное уравнение – квадратное, поэтому имеет не более двух корней.

Если один корень уже подобран, то второй может быть найден по теореме Виета.

1.2. Из четырех палочек сложен контур параллелограмма. Обязательно ли из них можно сложить контур треугольника (одна из сторон треугольника складывается из двух палочек)?

Ответ: нет, не обязательно.

Решение. Пусть из четырех одинаковых палочек длины a сложен контур ромба. Тогда треугольник из них сложить нельзя, так как треугольника со сторонами a, a и $2a$ не существует.

1.3. Три пирата нашли клад, состоящий из 240 золотых слитков общей стоимостью 360 долларов. Стоимость каждого слитка известна и выражается целым числом долларов. Может ли оказаться так, что добычу нельзя разделить между пиратами поровну, не переплавляя слитки?

Ответ: да, может.

Решение. Пусть один из слитков стоит 121 доллар, а каждый из остальных слитков стоит 1 доллар (таких слитков будет 239). Так как каждому пирату должно достаться слитков ровно на 120 долларов, то в этом случае разделить добычу поровну будет невозможно.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Марья Петровна идет по дороге со скоростью 4 км/ч. Увидев пенек, она садится на него и отдыхает одно и то же целое число минут. Михаил Потапович идет по той же дороге со скоростью 5 км/ч, зато сидит на каждом пеньке в два раза дольше, чем Марья Петровна. Вышли и пришли они одновременно. Длина дороги – 11 км. Сколько на ней могло быть пеньков?

Ответ: 1, 3, 11 или 33 пенька.

Решение. Марья Петровна преодолевает указанную дистанцию за $\frac{11}{4}$ часа, а Михаил Потапович – за $\frac{11}{5}$ часа. Следовательно, Марья Петровна отдыхает на $\frac{11}{4}-\frac{11}{5}=\frac{11}{20}$ (ч) больше, что составляет 33 минуты.

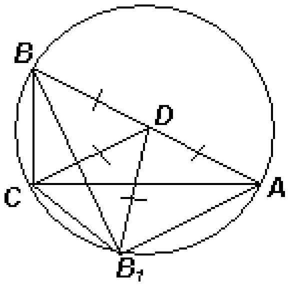
Так как на каждом пеньке Марья Петровна сидит целое число минут и количество пеньков – целое, то на каждом пеньке она могла сидеть 33, 11, 3 или 1 минуту, что соответствует 1, 3, 11 или 33 пенькам.

2.2. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, $\angle BAC = 35^\circ$. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CD. Найдите угол AB_1C.

Ответ: 125°.

Решение. Из условия задачи следует, что точка D – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Кроме того, из симметрии $DB_1 = DB$, поэтому точка B_1 лежит на этой окружности (см. рис. 1). Тогда $\angle AB_1C = 180° - \angle ABC = 90° + \angle BAC = 125°$.

Рис. 1



2.3. Остаток от деления натурального числа X на 26 равен неполному частному, остаток от деления X на 29 также равен неполному частному. Найдите все такие X.

Ответ: 270; 540.

Решение. Из условия задачи следует, что $\begin{cases} X = 26m + m, \\ X = 29n + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 27m, \\ X = 30n \end{cases}$.

Следовательно, $27m = 30n \Leftrightarrow 9m = 10n$, значит, m кратно 10. Так как остаток при делении на 26 не больше, чем 25, то m =10 или m = 20. Таким образом, X = 270 или X = 540.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Известно, что $\dfrac{a}{b+c-a} = \dfrac{b}{a+c-b} = \dfrac{c}{a+b-c}$. Какие значения может принимать выражение $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$?

Ответ: –1 или 8.

Решение. Перепишем условие в виде: $\dfrac{b+c-a}{a} = \dfrac{a+c-b}{b} = \dfrac{a+b-c}{c} = x$, тогда $b+c-a = ax$, $a+c-b = bx$, $a+b-c = cx$. Сложим полученные равенства почленно: $a+b+c = (a+b+c)x \Leftrightarrow (a+b+c)(x-1) = 0$. Возможны два случая:

1) $a+b+c=0$, тогда $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \dfrac{(-c)(-a)(-b)}{abc}$ = –1;

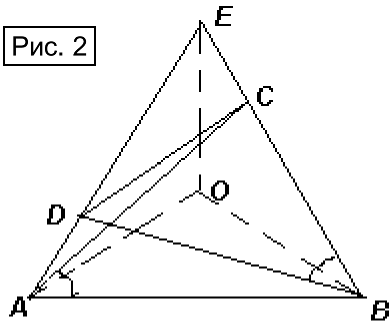
2) $x=1$, тогда $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \dfrac{2c\cdot 2a\cdot 2b}{abc}$ = 8.

Можно также провести аналогичное рассуждение, не «переворачивая» дроби, заданные в условии.

3.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle DAB = \angle ABC = 60°$ и $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что $AD + CB = AB$.

Решение. Продлим стороны AD и BC до их пересечения в некоторой точке E, тогда треугольник ABE – равносторонний (см. рис. 2). Докажем, что $BC = ED$. Это можно сделать различными способами.

Рис. 2



<u>Первый способ</u>. В треугольниках ABC и BED: $AB = BE$; $\angle CAB = \angle DBE$, $\angle ABC = 60° = \angle BED$. Таким образом, $\Delta ABC = \Delta BED$ (по второму признаку). Следовательно, $BC = ED$.

<u>Второй способ</u>. Пусть O – центр треугольника ABE. При повороте с центром O на угол 120° против часовой стрелки образами вершин A и B являются вершины B и E соответственно, тогда образом луча AC – луч BD (из равенства $\angle CAB = \angle CBD$). Так как образом стороны BE при этом повороте является сторона EA, то образом точки C является точка D. Следовательно, $BC = ED$.

Таким образом, $AD + CB = AD + ED = AE = AB$.

Отметим, что при рассуждениях во втором способе было использовано основное свойство взаимно однозначных отображений (в частности, движений): образ пересечения равен пересечению образов.

3.3. Петя нашел сумму всех нечетных делителей некоторого четного числа (включая 1), а Вася – сумму всех четных делителей этого же числа (включая само число). Может ли произведение двух найденных чисел быть точным квадратом?

Ответ: нет, не может.

Решение. Пусть 2^n – наибольшая степень двойки, на которую делится данное число. Если Петя получил набор его нечетных делителей a_1, a_2, … , a_m, то в Васином наборе четных делителей должны быть все числа, которые получаются из всех нечетных делителей умножением на каждую степень двойки от 2^1 до 2^n. Таким образом, все числа из Васиного набора имеют вид: $2^k \cdot a_i$, где $1 \le k \le n$, $1 \le i \le m$.

Обозначим сумму Петиных чисел через A. Тогда сумма Васиных чисел равна $A\cdot(2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n)$. Следовательно, произведение Петиной и Васиной сумм равно $A^2\cdot(2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n)$. Для того, чтобы это число являлось точным квадратом, необходимо, чтобы выражение в скобках являлось точным квадратом. Но записанная сумма степеней двойки при делении на 4 дает остаток 2, то есть она делится на 2, но не делится на 4, поэтому точным квадратом являться не может.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Докажите, что для положительных значений a, b и c выполняется неравенство $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Решение. Докажем, что при $x > 0$ и $y > 0$ справедливо неравенство $\frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}$.

Действительно, $\frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{x^2+y^2} \le \frac{x+y}{2xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2xy} \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$.

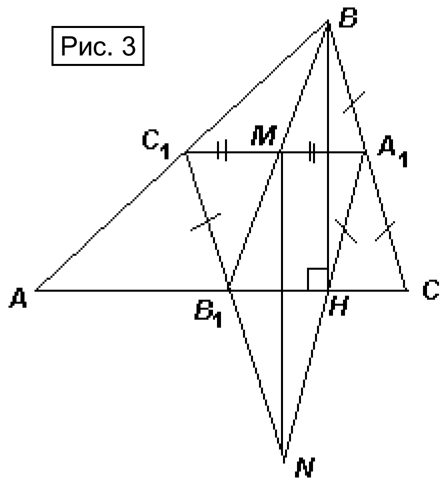
Теперь запишем три однотипных верных неравенства: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \le \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$, $\frac{b+c}{b^2+c^2} \le \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}$, $\frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2}$ и сложим их почленно. Получим доказываемое неравенство.

4.2. В треугольнике ABC проведены высота BH, медиана BB_1 и средняя линия A_1C_1 (A_1 лежит на стороне BC, C_1 – на стороне AB). Прямые A_1C_1 и BB_1 пересекаются в точке M, а прямые C_1B_1 и A_1H – в точке N. Докажите, что прямые MN и BH параллельны.

Решение. Так как $A_1C_1 \parallel AC$, то M – середина отрезка A_1C_1 (см. рис. 3). Кроме того, $C_1B_1 = \frac{1}{2}BC = A_1C = A_1H$, поскольку HA_1 – медиана прямоугольного треугольника BHC. Таким образом, $C_1B_1HA_1$ – равнобокая трапеция, откуда следует, что треугольник A_1NC_1 – равнобедренный. Поэтому его медиана NM является и высотой. Значит, $MN \perp AC$, то есть $MN \parallel BH$.

Доказать, что трапеция $C_1B_1HA_1$ – равнобокая, можно и по-другому. Точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности (окружности девяти точек треугольника ABC), а любая вписанная трапеция – равнобокая.

Рис. 3



4.3. В строку выписаны 40 знаков: 20 крестиков и 20 ноликов. За один ход можно поменять местами любые два соседних знака. За какое наименьшее количество ходов можно гарантированно добиться того, чтобы какие-то 20 стоящих подряд знаков оказались крестиками?

Ответ: за 200 ходов.

Решение. Для того, чтобы 20 крестиков стояли подряд, требуется, чтобы все нолики стояли с краев (возможно, все с одного края). Пусть есть строка с произвольной расстановкой крестиков и ноликов. Будем делать разрешенные ходы, перемещая нолики к правому или к левому краю так, чтобы правее или левее них уже не было крестиков.

Для этого, сначала выберем самый правый и самый левый нолики. Для того, чтобы один из них оказался с краю, требуется не более, чем 10 ходов, так как либо слева от самого левого, либо справа от самого правого нолика стоит не более, чем 10 крестиков.

Далее, возьмем самый правый и самый левый нолик из оставшихся 19. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более, чем 10 ходов, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более, чем $20 \cdot 10 = 200$ ходов.

Приведем пример изначальной расстановки для случая, когда меньшего количества ходов не хватит. Пусть в ряд стоят 10 крестиков, затем 20 ноликов, а затем еще 10 крестиков. В этом случае для перемещения каждого нолика к краю потребуется ровно 10 ходов.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Существует ли такое x, что $\sqrt{x+9}+\sqrt{x}+\sqrt{x-9} = 7$?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Левая часть равенства имеет смысл при $x \geq 9$. Поэтому $\sqrt{x} \geq \sqrt{9} = 3$; $\sqrt{x+9} \geq \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. Тогда $\sqrt{x+9}+\sqrt{x}+\sqrt{x-9} \geq 3 + 3\sqrt{2} + 0 > 3 + 3 \cdot 1,4 = 7,2 > 7$..

5.2. На доске был изображен пятиугольник, вписанный в окружность. Маша измерила его углы и у нее получилось, что они равны 80°, 90°, 100°, 130° и 140° (именно в таком порядке). Не ошиблась ли Маша?

Ответ: Маша, конечно, ошиблась.

Решение. Пусть $ABCDE$ – данный четырехугольник, в котором углы A, B. C, D и E соответственно равны 80°, 90°, 100°, 130° и 140° (см. рис. 4). Далее можно рассуждать по-разному.

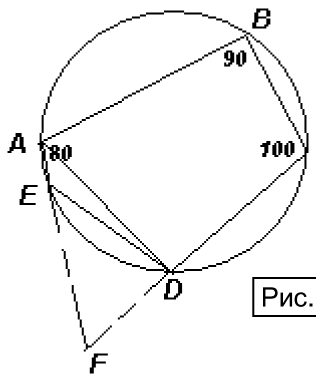


Рис. 4

Первый способ. Проведем диагональ AD, тогда четырехугольник $ABCD$ также вписанный, поэтому $\angle BAD = 180° - \angle BCD = 80°$. Таким образом, $\angle BAD = \angle BAE$, что невозможно.

Второй способ. Продлим отрезок AE до пересечения с прямой CD в точке F. В четырехугольнике $ABCF$: $\angle BAF + \angle BCD = 180°$, значит, этот четырехугольник – вписанный, то есть точка F лежит на той же окружности, что невозможно.

Существуют и другие решения.

5.3. Трое играют в настольный теннис на «вылет», то есть игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге Никанор сыграл 10 партий, Филимон – 15, а Агафон – 17. Кто из них проиграл во второй партии?

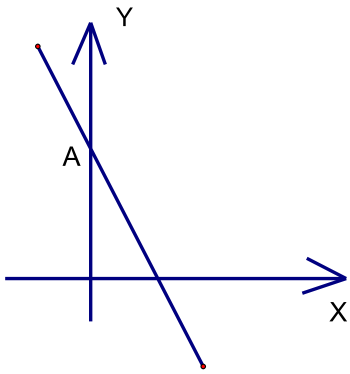
Ответ: Никанор.

Решение. Всего было сыграно $(10 + 15 + 17) : 2 = 21$ партий. Заметим, что любой из мальчиков не мог пропускать две или более партий подряд. Значит, Никанор играл все партии с четным номером. Так как он не играл в третьей партии, то вторую партию он проиграл.

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*).

1.1. На рисунке изображен график функции $y = (a^2 - 1)(x^2 - 1) + (a - 1)(x - 1)$. Найдите координаты точки *A*.



Ответ: *A*(0; 2).

Решение. Так как графиком является прямая, то заданная функция – линейная. Следовательно, $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

Рассмотрим два случая:

1) Если $a = 1$, то $y = 0$, что не соответствует заданному графику (он не совпадает с осью абсцисс). Следовательно, $a \neq 1$.

2) Если $a = -1$, то $y = -2x + 2$, что соответствует заданному графику (при $x = 1$ $y = 0$ и угловой коэффициент наклона прямой отрицателен).

Подставив $x = 0$ в уравнение $y = -2x + 2$, получим, что $y = 2$.

1.2. Существует ли выпуклый четырехугольник, каждая диагональ которого делит его на два остроугольных треугольника?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Предположим, что такой четырехугольник существует. Из условия задачи следует, что каждый его угол является углом остроугольного треугольника. Следовательно, все углы этого четырехугольника – острые, а их сумма меньше, чем 360°, что противоречит теореме о сумме углов четырехугольника.

1.3. Петя разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой на две части. Затем одну часть снова разрезал по прямой на две. Потом одну из получившихся частей опять разрезал на две части, и так далее, всего он резал бумагу сто раз. Потом Петя подсчитал суммарное количество вершин у всех получившихся многоугольников – получилось всего 302 вершины. Могло ли так быть?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Сделав сто разрезов, Петя получил 101 многоугольник, поэтому суммарно у них не меньше, чем 303 вершины.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

2.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = y + z, \\ \dfrac{1}{y} = z + x, \\ \dfrac{1}{z} = x + y. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. Первый способ. Вычитая из первого уравнения второе, получим: $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = y - x \Leftrightarrow \dfrac{y - x}{xy} = y - x \Leftrightarrow (y - x)\left(\dfrac{1}{xy} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$ или $xy = 1$.

1) Если $x = y$, то, исключив из первого и третьего уравнений переменную *y*, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = x + z, \\ \dfrac{1}{z} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{1}{2x}, \\ \dfrac{1}{2x} = x \end{cases} \Leftrightarrow x = z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

2) Если $xy=1$, то из первого уравнения следует, что $z=0$, тогда выражение $\frac{1}{z}$ не имеет смысла. Таким образом, этот случай невозможен.

Второй способ. Заметим, что $\begin{cases}\frac{1}{x}=y+z,\\ \frac{1}{y}=z+x,\\ \frac{1}{z}=x+y.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+x=x+y+z,\\ \frac{1}{y}+y=z+x+y,\\ \frac{1}{z}+z=x+y+z.\end{cases}$ Пусть $x+y+z=A$, тогда x, y и z – корни уравнения $\frac{1}{t}+t=A$, которое равносильно квадратному уравнению $t^2-At+1=0$. Так как квадратное уравнение имеет не более двух корней, то значения каких-то двух переменных должны быть одинаковыми. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассмотренным в пункте 1) первого способа.

2.2. На сторонах *AB*, *BC* и *CA* равностороннего треугольника *ABC* выбраны точки *D*, *E* и *F* соответственно так, что *DE* || *AC*, *DF* || *BC*. Найдите угол между прямыми *AE* и *BF*.

Ответ: 60°.

Решение. Пусть *AE* и *BF* пересекаются в точке *N*, тогда ∠*ANF* = φ – искомый (см. рис. 1а, б). Так как *CEDF* – параллелограмм, а треугольник *BDE* – равносторонний, то *BE* = *CF* (см. рис. 1а). Далее можно рассуждать по-разному.

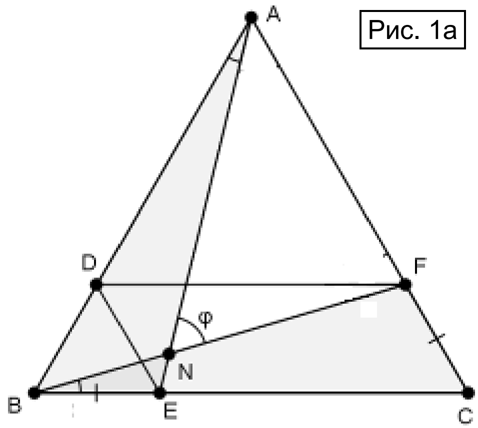
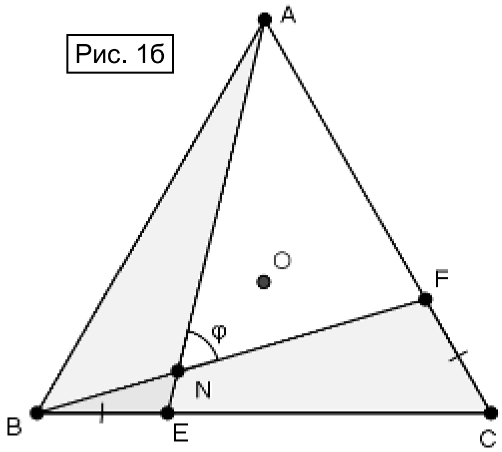


Рис. 1а

Первый способ. Треугольники *BAE* и *CBF* равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, ∠*BAE* = ∠*CBF* = α, тогда ∠*ABF* = 60° – α. Угол *ANF* – внешний для треугольника *ABN*, значит, ∠*ANF* = ∠*BAE* + ∠*ABF* = 60°.

Второй способ. Рассмотрим поворот вокруг точки *O* – центра треугольника *ABC* на угол 120° против часовой стрелки (см. рис. 1б). При таком повороте вершина *A* перейдет в вершину В, сторона *BC* – в сторону *CA*, а так как *BE* = *CF*, то точка *E* перейдет в точку *F*. Следовательно, луч *AE* перейдет в луч *BF*. Угол между этими лучами равен углу поворота, то есть ∠*ENF* = 120°, значит, ∠*ANF* = 60°.

Рис. 1б


2.3. На доске записаны числа 20 и 100. Разрешается дописать на доску произведение любых двух имеющихся на ней чисел. Можно ли такими операциями когда-нибудь получить на доске число 50...0 (2015 нулей)?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Так как 20 = $2^2 \cdot 5$, 100 = $2^2 \cdot 5^2$, то изначально на доске записаны числа, в разложении которых простые множители двоек не меньше, чем пятерок. При умножении двух чисел, обладающим этим свойством, получится число с этим же свойством, то есть оно будет выполняться для всех чисел, записанных на доске. В разложении числа 50…0 на простые множители количество пятерок на 1 больше, чем количество двоек, поэтому его получить нельзя.

Эту же идею можно реализовать по-другому. Так как 20 = 2·10, 100 = 10^2, то любое число, которое будет дописано на доске имеет вид $2^k \cdot 10^n$, где k и n – натуральные числа. Но 50...0 не является числом такого вида.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*).

3.1. Сумма трех различных чисел равна 10, а разность между наибольшим и наименьшим равна 3. Какие значения может принимать число, среднее по величине?

Ответ: $\frac{7}{3} < b < \frac{13}{3}$.

Решение. Пусть $a+b+c=10$, $a>b>c$, $a-c=3$. Исходя из этих условий, найдем, в каких границах может находиться значение b. Исключив переменную a, получим: $b+2c=7$, $c+3>b>c$, что равносильно условиям $2c=7-b$ и $2c+6>2b>2c$. Тогда $13-b>2b>7-b \Leftrightarrow 13>3b>7 \Leftrightarrow \frac{13}{3}>b>\frac{7}{3}$.

3.2. Внутри параллелограмма *ABCD* выбрана точка *P* так, что ∠*APB* + ∠*CPD* = 180°. Докажите, что ∠*PBC* = ∠*PDC*.

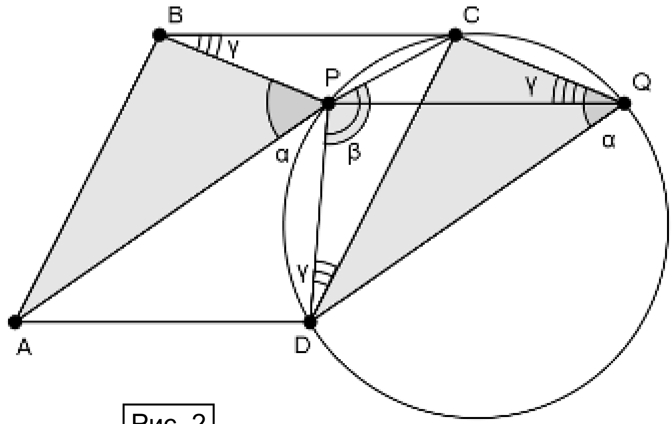


Рис. 2

Решение. Построим отрезок *CQ*, параллельный и равный отрезку *BP* (см. рис. 2). Тогда ∠*DCQ* = ∠*ABP* (углы с сонаправленными сторонами). Значит, равны треугольники *CDQ* и *BAP* (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, ∠*DQC* = ∠*APB*, значит, ∠*CPD* + ∠*DQC* = 180°. Таким образом, четырехугольник *CPDQ* – вписанный.

Проведя окружность, описанную около *CPDQ*, получим, что ∠*PDC* = ∠*PQC* (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Так как *BPQC* – параллелограмм, то ∠*PBC* = ∠*PQC* = ∠*PDC*, что и требовалось.

Дополнительное построение, использованное при решении, по сути является параллельным переносом на вектор $\overline{BC}$.

3.3. Каких натуральных чисел от 1 до 1 000 000 (включительно) больше: чётных с нечётной суммой цифр или нечётных с чётной суммой цифр?

Ответ: четных чисел с нечетной суммой цифр больше.

Решение. Рассмотрим произвольное число с нечетной суммой цифр. Если к нему справа приписать четную цифру, то получится четное число с нечетной суммой цифр. Если же справа приписать нечетную цифру, то получится нечетное число с четной суммой цифр. Так как приписать можно любую цифру от 0 до 9, то при выполнении такой операции получится одинаковое количество чисел с указанными свойствами.

Рассмотрим произвольное число с четной суммой цифр. Если к нему справа приписать четную цифру, то получится четное число с четной суммой цифр, а если приписать нечетную цифру, то получится нечетное число с нечетной суммой цифр. В обоих случаях мы получим числа, не обладающие ни одним из свойств, указанных в условии.

Эти рассуждения можно также представить в виде таблицы (цифрами 1 и 2 обозначены свойства, указанные в условии, взятые в том же порядке).

N	Ч	Ч	Ч	Ч	Н	Н	Н	Н
S(N)	Ч	Ч	Н	Н	Ч	Ч	Н	Н
Посл. цифра	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н
Рез.	–	–	1	2	–	–	1	2

Заметим, что среди чисел от 1 до 9 нет чисел, обладающих указанными свойствами, а все числа от 10 до 999 999 можно получить, приписывая последнюю цифру к числам от 1 до 99 999. Значит среди чисел от

1 до 999999 чисел с указанными свойствами поровну. Но еще есть четное число 1 000 000, у которого нечетная сумма цифр, поэтому таких чисел больше.

Эту же идею можно реализовать иначе. Назовём числа, о которых говорится в условии задачи, «интересными» Рассмотрим сначала первые два десятка. Среди чисел от 1 до 9 интересных нет, а все числа от 10 до 19 будут интересными, причем их будет поровну: 5 чётных чисел с нечётной суммой цифр и 5 нечётных чисел с чётной суммой цифр.

*Теперь рассмотрим произвольный десяток чисел, идущих подряд, от *0 до *9 (знаком * обозначена одна и та же последовательность цифр). Если сумма цифр в последовательности * чётная, то в этом десятке не встретится интересных чисел. Если же она нечётная, то все числа этого десятка будут интересными, и их опять-таки будет поровну каждого вида. Заметим, что при разбиении числового ряда от 10 до 999 999 на такие десятки, интересных чисел обоих видов получится поровну, но останется ещё число 1 000 000, которое, будучи чётным, имеет нечётную сумму цифр, поэтому таких чисел будет больше.*

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*).

4.1. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, ..., x_{10}$ равна 1. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_9x_{10}$.

Ответ: 0,25.

Решение. Первый способ. Заметим, что для неотрицательных чисел справедливо неравенство: $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_9x_{10} \le (x_1 + x_3 + \ldots + x_9)(x_2 + x_4 + \ldots + x_{10})$. Далее воспользуемся верным неравенством $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (*следствие из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим*).

Получим, что $(x_1 + x_3 + \ldots + x_9)(x_2 + x_4 + \ldots + x_{10}) \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Таким образом, $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_9x_{10} \le \frac{1}{4}$.

Равенство, например, достигается, если $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_{10} = 0$.

Второй способ. Пусть x_n – наибольшее из чисел $x_1, x_2, ..., x_{10}$. В каждом слагаемом заданной суммы, не содержащем x_n, заменим один из множителей на x_n, тогда эта сумма не уменьшится. Вынося x_n в полученной сумме за скобки, получим: $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_9x_{10} \le x_n(x_1 + x_2 + ... + x_{10} - x_n) = x_n(1 - x_n) \le \frac{1}{4}$ (*опять использовано неравенство* $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$).

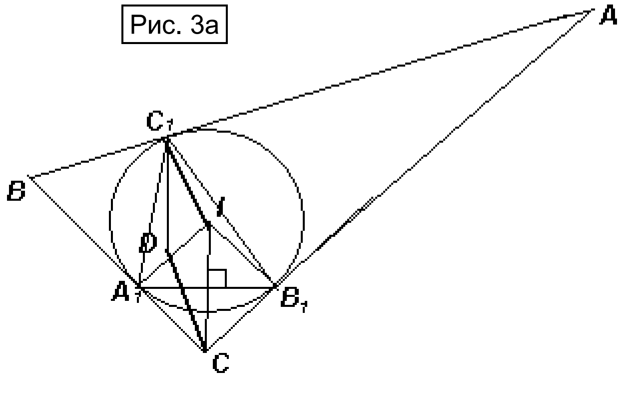
Пример, когда достигается равенство, приведен выше.

4.2. Вписанная окружность прямоугольного треугольника *ABC* (угол *C* – прямой) касается сторон *AB*, *BC* и *CA* в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Высоты треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке *D*. Найдите расстояние между точками *C* и *D*, если длины катетов треугольника *ABC* равны 3 и 4.

Ответ: 1.

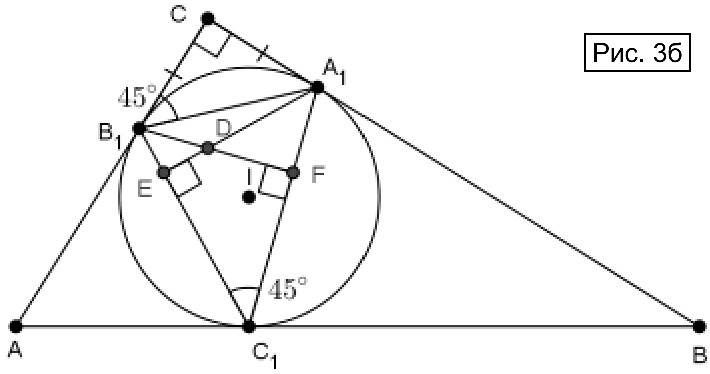
Решение. Пусть *I* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*, тогда A_1IB_1C – квадрат (см. рис. 3а). Заметим, что для треугольника $A_1B_1C_1$ эта окружность является описанной. Далее можно рассуждать по-разному.

Рис. 3а



Первый способ. Рассмотрим четырехугольник CDC_1I и докажем, что это – параллелограмм (см. рис. 3а). Действительно, $IC \perp A_1B_1$ и $C_1D \perp A_1B_1$ (так как прямая C_1D содержит высоту треугольника $A_1B_1C_1$), поэтому $IC \parallel C_1D$. Кроме того, $IC = C_1D$, так как в любом треугольнике расстояние от центра описанной окружности до середины стороны в два раза меньше, чем расстояние от противолежащей вершины до ортоцентра треугольника.

Из доказанного следует, что $CD = IC_1 = r$. Для вычисления радиуса r вписанной окружности треугольника ABC воспользуемся формулой $r = \dfrac{AC + BC - AB}{2}$. Учитывая, что $AB = 5$, получим, что $r = 1$.



Второй способ. Используя теорему об угле между касательной и хордой и учитывая, что A_1IB_1C – квадрат, получим: $\angle B_1C_1A_1 = \angle CB_1A_1 = 45°$ (см. рис. 3б).

Пусть B_1F и A_1E – высоты треугольника $A_1B_1C_1$. Из четырехугольника DEC_1F найдем, что $\angle EDF = 135°$.

Рассмотрим окружность с центром C и радиусом $CB_1 = CA_1$ (см. рис. 3в). Докажем, что точка D лежит на этой окружности. Действительно, рассмотрим на такой окружности точку произвольную точку K на большей дуге B_1A_1. Тогда $\angle B_1KA_1 = \dfrac{1}{2}\angle B_1CA_1 = 45°$. Значит, $\angle B_1KA_1 + \angle B_1DA_1 = 45° + 135° = 180°$. Следовательно, четырехугольник B_1KA_1D – вписанный.

Таким образом, $CD = CB_1 = r$. Дальнейшие вычисления приведены выше.

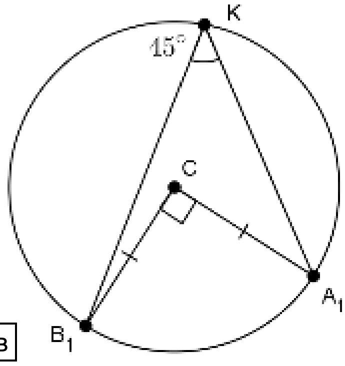


Рис. 3в

В заключительной фазе решения для вычисления CB_1 можно также использовать тот факт, что в любом треугольнике расстояние от вершины до точки касания равно разности полупериметра и противолежащей стороны.

4.3. Василиса Премудрая расставляет все натуральные числа от 1 до n^2, где $n > 1$, в клетки таблицы размером $n \times n$. Кандидат в женихи должен вычеркнуть строку и столбец так, чтобы сумма всех оставшихся чисел была четной. Всегда ли выполнимо такое задание?

Ответ: всегда.

Решение. Заметим, что четность суммы чисел в такой таблице $n \times n$ совпадает с четностью числа n. Объединение строки и столбца, в которых находится число в таблице, будем называть его «перекрестием». Тогда, если n – четное, то кандидат в женихи должен вычеркнуть перекрестие, в котором сумма чисел четна, а если n – нечетное, то он должен вычеркнуть перекрестие с нечетной суммой чисел.

Для каждого числа в таблице подсчитаем сумму чисел в его перекрестии и сложим все полученные суммы. Тогда каждое число из таблицы будет учтено $2n - 1$ раз, поэтому получим: $S = (2n - 1)(1 + 2 + \ldots + n^2)$. Следовательно, четность числа S совпадает с четностью числа n.

Пусть n – четное. Рассмотрим два случая:

1) В таблице есть строка или столбец с нечетной суммой чисел. Пусть, для определенности, это будет строка L, тогда среди чисел этой строчки найдется такое, что сумма чисел его перекрестия четна. Действительно, если такого перекрестия нет, то сумма чисел в каждом столбце без числа в строке L четна (иначе данное перекрестие было бы искомым), а значит, сумма чисел во всех строках, кроме L, четна. Но сумма

чисел в самой строке L нечетна, а то это противоречит тому, что сумма всех чисел таблицы четна.
2) Во всех строках и столбцах таблицы сумма чисел четная. Тогда кандидату в женихи достаточно вычеркнуть перекрестие любого четного числа.

Пусть n – нечетное. Тогда, так как число S – нечетное, то в таблице найдется перекрестие с нечетной суммой чисел.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*).

5.1. Существует ли квадратный трёхчлен, который при x = 2014; 2015; 2016 принимает значения 2015; 0; 2015 соответственно?

Ответ: да, существует.

Решение. <u>Первый способ</u>. Из условия задачи следует, что точки (2014; 2015) и (2016; 2015) должны принадлежать графику данного трехчлена (параболе). Так как они симметричны относительно прямой x = 2015, то эта прямая – ось параболы, тогда точка (2015; 0) – ее вершина. Следовательно, формула искомого трехчлена имеет вид: $f(x)=a(x-2015)^2$. Значение a можно найти либо подстановкой любой из пар (2014; 2015) или (2016; 2015) в полученное уравнение, либо зная, что a – коэффициент растяжения от оси абсцисс, при котором график искомого трехчлена получается из графика трехчлена $f(x)=(x-2015)^2$. Получим, что a = 2015, то есть $f(x)=2015(x-2015)^2$.

<u>Второй способ</u>. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ – искомый квадратный трехчлен. Из условия задачи следует, что $f(2014)=f(2016)=2015$, $f(2015)=0$, $x_1=2015$ – корень трехчлена. Следовательно, $ax^2+bx+c=a(x-2015)(x-x_2)$.

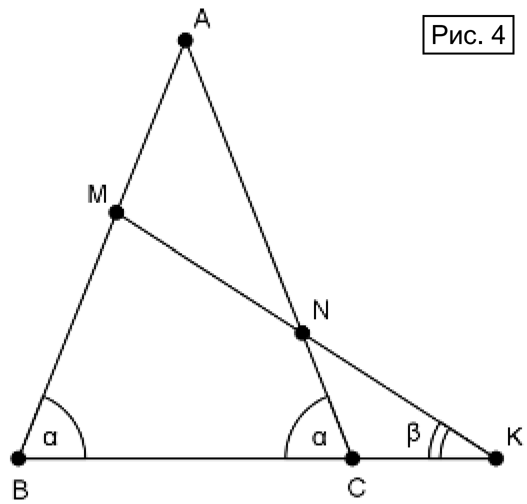
После подстановки условий, записанных выше, получим систему уравнений: $\begin{cases} a(2014-2015)(2014-x_2)=2015, \\ a(2016-2015)(2016-x_2)=2015 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a(2014-x_2)=2015, \\ a(2016-x_2)=2015 \end{cases}$. Следовательно, $a(2016-x_2)=-a(2014-x_2) \Leftrightarrow 2016-x_2=x_2-2014 \Leftrightarrow x_2=2015$, то есть $x_1=x_2=2015$. Подставив x_2 в любое из уравнений системы, получим, что $a=2015$. Тогда $f(x)=2015(x-2015)^2$.

5.2. На сторонах *AB* и *AC* равнобедренного треугольника *ABC* (*AB* = *AC*) соответственно отмечены точки *M* и *N* так, что *AN* > *AM*. Прямые *MN* и *BC* пересекаются в точке *K*. Сравните длины отрезков *MK* и *MB.*

Ответ: *MK* > *MB.*

Решение. Пусть $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$, $\angle NKC = \beta$ (см. рис. 4). Так как угол *ACB* – внешний для треугольника *CNK*, то $\alpha > \beta$. В треугольнике *BKM* против большего угла лежит большая сторона, значит, *MK* > *MB.*

Рис. 4



5.3. Можно ли расставить натуральные числа от 1 до 10 в ряд так, чтобы каждое число было делителем суммы всех предыдущих?

Ответ: да, можно.

Решение. Например, так: 7, 1, 8, 4, 10, 6, 9, 3, 2, 5.

Существуют и другие примеры. Отметим, что в любом примере на последнем месте должно стоять либо 1, либо 5. Действительно, последнее число x должно быть *делителем числа (1 + 2 + ... + 10) – x = 55 – x, следовательно, оно должно быть делителем числа 55.*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА 9 КЛАССОВ 8.10.2016

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Известно, что значения выражений $\frac{b}{a}$ и $\frac{b}{c}$ находится в интервале (–0,9; –0,8). В каком интервале лежат значения выражения $\frac{c}{a}$?

Ответ: в интервале $\left(\frac{8}{9};\frac{9}{8}\right)$.

Решение. Запишем заданные условия в виде неравенств: $-0{,}9<\frac{b}{a}<-0{,}8$ и $-0{,}9<\frac{b}{c}<-0{,}8$. Умножив почленно каждое неравенство на –1, получим: $0{,}9>-\frac{b}{a}>0{,}8$ (1) и $0{,}9>-\frac{b}{c}>0{,}8$ (2). В неравенствах (1) и (2) все члены положительны.

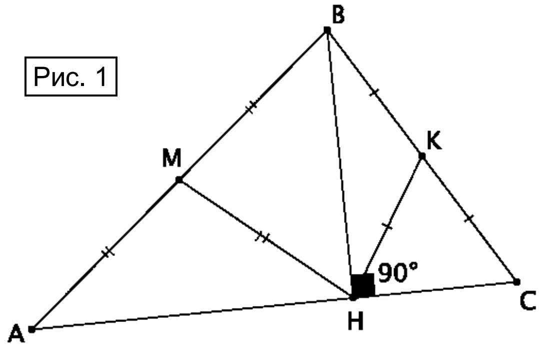
Так как $x > y > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y}>\frac{1}{x}>0$, то $\frac{10}{8}>-\frac{c}{b}>\frac{10}{9}$ (3). Перемножим почленно неравенства (3) и (1): $\frac{10}{8}\cdot\frac{9}{10}>-\frac{c}{b}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)>\frac{10}{9}\cdot\frac{8}{10} \Leftrightarrow \frac{9}{8}>\frac{c}{a}>\frac{8}{9}$.

1.2. Верно ли, что любой треугольник можно разбить на 4 равнобедренных треугольника?

Ответ: верно.

Решение. В любом треугольнике высота, проведенная к наибольшей стороне, лежит внутри треугольника. Рассмотрим треугольник *ABC*, в котором *AC* – наибольшая сторона, и проведем его высоту *BH* (см. рис. 1). Она разбивает исходный треугольник на два прямоугольных треугольника. В этих прямоугольных треугольниках проведем медианы *HM* и *HK* к гипотенузам. Они разобьют каждый прямоугольный треугольник на два равнобедренных треугольника.

Рис. 1



Таким образом, произвольный треугольник *ABC* разобьется на 4 равнобедренных треугольника: *AMH*, *BMH*, *BKH* и *CKH*

1.3. Верно ли, что любое положительное четное число можно представить в виде произведения целых чисел, сумма которых равна нулю?

Ответ: верно.

Решение. Действительно, для любого $k > 0$ выполняется равенство $2k = 2k\cdot(-1)^{2k}$.

Отметим, что для нечетных чисел это не так, в частности, нечетные простые числа представить требуемым образом не удается.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Решите уравнение: $\frac{x^5}{(x-2)^2}+\frac{(x-2)^2}{x}=2x^2$.

Ответ: 1.

Решение. <u>Первый способ</u>. Учитывая, что $x \neq 0$, разделим обе части уравнения на x, и преобразуем: $\frac{x^4}{(x-2)^2} - 2x + \frac{(x-2)^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{|x-2|} - \frac{|x-2|}{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{|x-2|} - \frac{|x-2|}{x} = 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^3 - (x-2)^2 = 0, \\ x \neq 0,\ x \neq 2 \end{cases}$. Так как $x^3 - (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4) = 0$, то $x = 1$.

<u>Второй способ</u>. Учитывая, что $x \neq 0$, разделим обе части уравнения на x^2: $\frac{x^3}{(x-2)^2} + \frac{(x-2)^2}{x^3} = 2$. После замены $\frac{x^3}{(x-2)^2} = y$ получим уравнение $y + \frac{1}{y} = 2$, единственным решением которого является $y = 1$. Тогда $\begin{cases} x^3 = (x-2)^2, \\ x \neq 0,\ x \neq 2 \end{cases}$ и дальнейшие выкладки аналогичны приведенным выше.

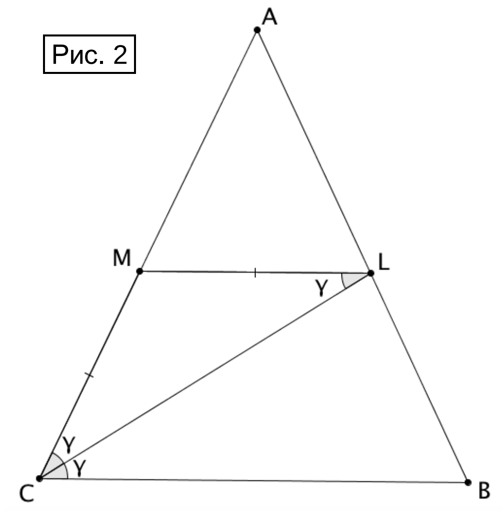
2.2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса CL. Докажите, что $CL < 2BL$.

Решение. Проведем через точку L прямую, параллельную BC, M – точка пересечения этой прямой со стороной AC (см. рис. 2). Пусть $\angle BCL = \angle MCL = \gamma$, тогда $\angle MLC = \angle BCL = \gamma$, так как $LM \parallel BC$.

Следовательно, треугольник MCL – равнобедренный: $MC = ML$. Кроме того, $CMLB$ – равнобокая трапеция, значит, $BL = MC$.

Из треугольника MCL: $CL < MC + ML = 2BL$, что и требовалось.

Рис. 2



2.3. Существует ли прямоугольный треугольник, у которого длины двух сторон – целые числа, а длина третьей стороны равна $\sqrt{2016}$?

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим, например, прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{2016}$ и 3. Его гипотенуза равна $\sqrt{\left(\sqrt{2016}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{2025} = 45$.

Указанный пример – это треугольник с наименьшими сторонами из возможных, но существуют и другие примеры. Приведем еще два: 1) катеты $\sqrt{2016}$ *и 10, гипотенуза 46; 2) катеты* $\sqrt{2016}$ *и 22, гипотенуза 50.*

Отметим, что треугольника с гипотенузой $\sqrt{2016}$*, удовлетворяющего условию задачи, не существует.*

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. По кольцевой дорожке длиной 60 см движутся в обе стороны муравьи со скоростью 1 см/с. Когда два муравья сталкиваются, они мгновенно разворачиваются и движутся с той же скоростью в противоположных направлениях. Оказалось, что за минуту произошло 48 попарных столкновений. Сколько муравьев могло быть на дорожке?

Ответ: 10 или 11 или 14 или 25.

Решение. Заметим, что ситуация не изменится, если считать, что после столкновении муравьи не разворачиваются, а продолжают свое движение, не меняя направления и скорости. Пусть какие-то два муравья столкнулись, тогда через 30 секунд после этого каждый из них проползет половину круга и они столкнутся вновь. Следовательно, у каждой такой пары произойдет ровно 2 столкновения за минуту.

Таким образом, если x муравьев ползут в одну сторону, а y муравьев – в противоположную, то $2xy = 48 \Leftrightarrow xy = 24$. Следовательно, искомая величина $x + y$ может принимать значения: 1 + 24 = 25, 2 + 12 = 14, 3 + 8 = 11, 4 + 6 = 10.

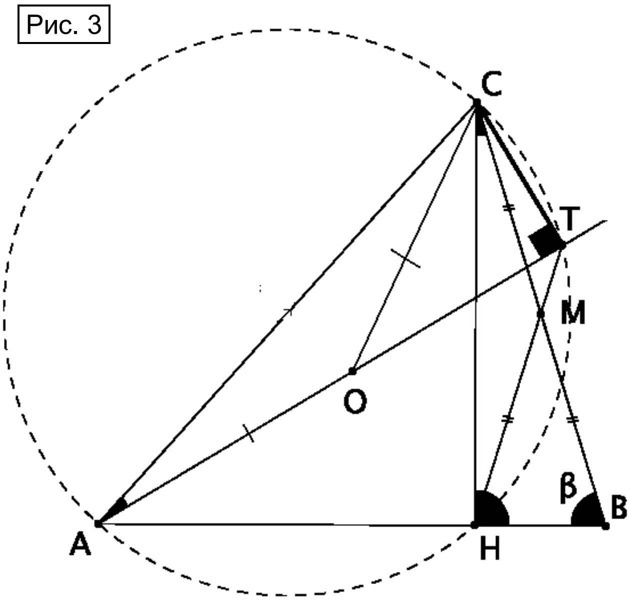
3.2. Пусть CH – высота остроугольного треугольника ABC, O – центр описанной около него окружности. Точка T – проекция вершины C на прямую AO. В каком отношении прямая TH делит сторону BC?

Ответ: 1 : 1.

Решение. Пусть TH и BC пересекаются в точке M, $\angle ABC = \beta$ (см. рис. 3). Тогда $\angle AOC = 2\beta$, значит, $\angle CAT = 90° - \beta$.

Так как $\angle CTA = \angle CHA = 90°$, то четырехугольник $ACTH$ – вписанный. Следовательно, $\angle CHT = \angle CAT = 90° - \beta$, тогда $\angle BHT = \beta$. Таким образом, $HM = BM$, то есть HM – медиана прямоугольного треугольника BHC.

Рис. 3



3.3. Дано 100 целых чисел. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго вычли сумму цифр третьего числа, и так далее, наконец, из 100-го числа вычли сумму цифр первого числа. Могут ли эти разности оказаться соответственно равными 1, 2, … , 100 в каком-то порядке?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Обозначим данные числа через a_1, a_2, a_3, … a_{100}, а соответствующие суммы их цифр через s_1, s_2, s_3, … s_{100}. Тогда после вычитания получим: $a_1 - s_2$, $a_2 - s_3$, $a_3 - s_4$, …, $a_{100} - s_1$. Сложим эти выражения и перегруппируем слагаемые: $(a_1 - s_1) + (a_2 - s_2) + … + (a_{100} - s_{100}) = 1 + 2 +…+ 100 = 5050$. Но любое целое число и сумма его цифр имеют одинаковый остаток от деления на 9, следовательно, выражение в левой части равенства делится на 9, а число 5050 не кратно девяти. Противоречие.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3 - y = 6, \\ y^3 - z = 6, \\ z^3 - x = 6 \end{cases}$.

Ответ: (2; 2; 2).

Решение. <u>Первый способ</u>. Вычтем из первого уравнения второе, а из второго уравнения – третье. Получим следствие данной системы: $\begin{cases} x^3 - y^3 = y - z, \\ y^3 - z^3 = z - x \end{cases}$.

Докажем, что $x = y = z$. Действительно,

1) Если $x \ge y$, то $y \ge z$ (из первого уравнения), тогда $z \ge x$ (из второго уравнения). Следовательно, $x \ge y \ge z \ge x$, откуда $x = y = z$.

2) Если $x \le y$, то $y \le z$ (из первого уравнения), тогда $z \le x$ (из второго уравнения).

Следовательно, $x \ge z \ge y \ge x$, откуда $x = y = z$.

Таким образом, все уравнения исходной системы равносильны уравнению $x^3 - x = 6$. Приведем его к виду $x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 0$ и разложим левую часть на множители: $(x-2)(x^2+2x+3) = 0$, откуда $x = 2$.

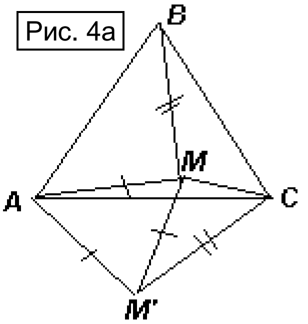
Полученное уравнение можно решить иначе: угадать корень $x = 2$, после чего разделить многочлен $x^3 - x - 6$ на $x - 2$ и получить квадратное уравнение, не имеющее корней.

Второй способ. Из второго уравнения системы: $z = y^3 - 6$. Подставив z в третье уравнение, получим: $(y^3 - 6)^3 - x = 6$. Подставив в это уравнение $y = x^3 - 6$ (из первого уравнения системы), получим: $((x^3 - 6)^3 - 6)^3 - 6 = x$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 6$, тогда полученное уравнение примет вид: $f(f(f(x))) = x$. Так как функция $f(x)$ – возрастающая, то это уравнение равносильно уравнению $f(x) = x$.* Тем самым получим уравнение $x^3 - x - 6 = 0$, решение которого рассмотрено выше.

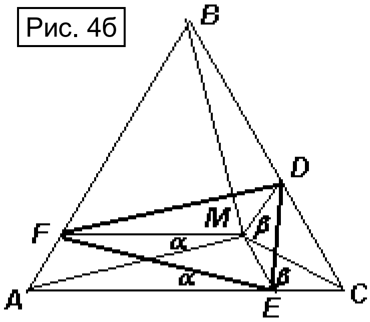
**Доказать, что $f(f(f(x))) = x \Leftrightarrow f(x) = x$, если $f(x)$ – возрастающая функция, можно, например, так. Справа налево справедливость этого утверждения очевидна. Пусть x_0 – корень левого уравнения, но не является корнем правого, то есть $f(x_0) \neq x_0$. Если $f(x_0) > x_0$, то, в силу возрастания функции f, $f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$, значит, и $f(f(f(x_0))) > f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$ – противоречие. Аналогично рассматривается случай, когда $f(x_0) < x_0$.*

4.2. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка M так, что $\angle AMC = 150°$. Докажите, что отрезки AM, BM и CM таковы, что сумма квадратов двух из них равна квадрату третьего.



Решение. Первый способ. Рассмотрим поворот с центром A на угол 60° по часовой стрелке. Образом точки B будет точка C, а образом точки M – некоторая точка M', тогда $CM' = BM$ (см. рис. 4а). Кроме того, в треугольнике MAM': $AM' = AM$ и $\angle M'AM = 60°$, значит, этот треугольник – равносторонний, то есть $MM' = AM$ и $\angle AMM' = 60°$. Тогда $\angle CMM' = \angle AMC - \angle AMM' = 90°$, то есть треугольник CMM' – прямоугольный.

Следовательно, $BM^2 = CM'^2 = CM^2 + MM'^2 = CM^2 + AM^2$, что и требовалось.



Второй способ. Через точку M проведем прямые, параллельные сторонам треугольника, которые пересекут стороны BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно (см. рис. 4б). Тогда $AEMF$, $BFMD$ и $CDME$ – равнобокие трапеции, поэтому $AM = EF$, $BM = FD$ и $CM = DE$. Докажем, что треугольник DEF – прямоугольный.

Действительно, пусть $\angle AEF = \angle AMF = \alpha$, $\angle DEC = \angle DMC = \beta$. Так как $\angle EMD = \angle EMF = 120°$, а $\angle AMC = 150°$, то $\alpha + \beta = 90°$. Значит, $\angle DEF = 90°$.

Таким образом, $FD^2 = DE^2 + EF^2$,то есть $BM^2 = CM^2 + AM^2$, что и требовалось.

4.3. На столе лежит прямоугольный лист бумаги. Саша разрезает его по прямой на две части и кладёт части на стол. Потом он берёт одну из частей, снова режет по прямой на две части и кладёт части обратно на стол. Потом снова берёт со стола и разрезает одну часть, и так далее. Какое наименьшее количество разрезов необходимо сделать Саше, чтобы на столе оказалось, по крайней мере, 252 одиннадцатиугольника?

Ответ: 2015.

Решение. Заметим, что после одного разреза общее количество вершин увеличивается на две (если разрез проходит через две вершины), на три (если разрез проходит через вершину и точку внутри стороны) или на четыре (если разрез проходит через внутренние точки двух сторон). Пусть было сделано k разрезов, после чего получилось $k + 1$ частей, в которых суммарно не более, чем $4k + 4$ вершин.

Предположим, что среди полученных частей ровно 252 одиннадцатиугольника. Каждый из оставшихся кусков будет иметь не менее трех вершин, а всего вершин будет, не меньше, чем $252 \cdot 11 + (k + 1 - 252) \cdot 3 = 2772 + 3k - 753 = 3k + 2019 \le 4k + 4$. Следовательно, $k \ge 2015$.

Покажем, что 2015 разрезов достаточно. Например, сначала разрежем исходный прямоугольник на 252 прямоугольника (251 разрез). Теперь, чтобы получить 252 одиннадцатиугольника, достаточно от каждого прямоугольника 7 раз отрезать по треугольнику, увеличивая каждый раз количество вершин на одну. Для этого потребуется еще $7 \cdot 252 = 1764$ разреза. Всего получим $251 + 1764 = 2015$ разрезов.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. График линейной функции $y = kx + k + 1$, где $k > 0$, пересекает оси координат в точках A и B. Какова наименьшая возможная площадь треугольника ABO (O – начало координат)?

Ответ: 2.

Решение. Схематически изобразим график данной функции (см. рис. 5). Абсцисса точки A пересечения с осью OX: $0 = kx + k + 1$; $x = -\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Ордината точки B пересечения с осью OY: $y = k \cdot 0 + k + 1$; $y = k + 1$. Следовательно, $S_{ABO} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2}(k+1)\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + k + \frac{1}{k}\right)$. Так как наименьшее значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$, то и наименьшее значение S_{ABO} достигается при $k = 1$.

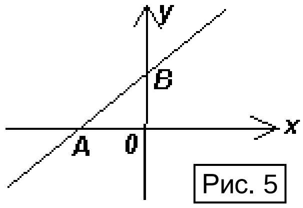


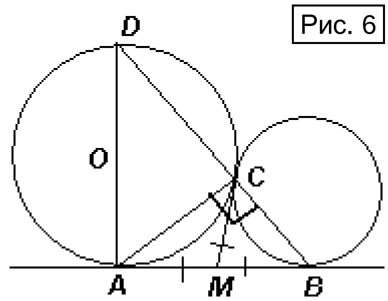
Рис. 5

Таким образом, наименьшая возможная площадь треугольника ABO равна 2.

5.2. Две окружности касаются друг друга в точке C и прямой l в точках A и B. Прямая BC пересекает вторую окружность в точке D. Докажите, что угол BAD – прямой.

Решение. Проведем общую внутреннюю касательную к данным окружностям, которая проходит через точку C. Пусть она пересекает прямую AB в точке M (см. рис. 6).

Так как касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, то $MA = MC = MB$. Из этого равенства следует, что треугольник ABC – прямоугольный, $\angle ACB = 90°$. Тогда смежный с ним угол ACD – также прямой, значит, AD – диаметр окружности. Следовательно, $DA \perp AB$.

Рис. 6


5.3. Дано 10 натуральных чисел. Из десяти всевозможных сумм по 9 чисел всего 9 различных: 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95. Найдите исходные числа.

Ответ: 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 14.

Решение. Рассмотрим сумму десяти возможных сумм по 9 чисел. Так как каждое из исходных чисел входит в эту сумму 9 раз, то она делится на 9. Сумма девяти сумм, заданных в условии, равна 813, то есть имеет остаток 3 при делении на 9. Следовательно неизвестная сумма должна давать остаток 6 при делении на 9. Из девяти заданных сумм этому условию удовлетворяет только 87, значит, сумма десяти исходных чисел равна $(813 + 87) : 9 = 100$. Вычитая из числа 100 заданные суммы и учитывая, что 87 повторится дважды, получим ответ.

Математическая регата 9 классов 7.10.2017

9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Саша спускался по лестнице из своей квартиры к другу Коле, который живет на первом этаже. Когда он спустился на несколько этажей, оказалось, что он прошёл треть пути. Когда он спустился ещё на один этаж, ему осталось пройти половину пути. На каком этаже живёт Саша?

Ответ: на седьмом этаже.

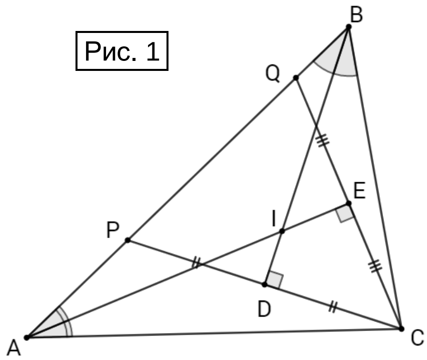
Решение. Один этаж составляет $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ часть пути Саши. Следовательно, весь путь – 6 этажей, а этаж, на котором живет Саша: 1 + 6 = 7.

1.2. На наибольшей стороне *AB* треугольника *ABC* отметили точки *P* и *Q* так, что *AQ* = *AC*, *BP* = *BC*. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника *PQC*, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Решение. Так как треугольник *PBC* – равнобедренный, то его биссектриса *BD* является серединным перпендикуляром к отрезку *CP* (см. рис. 1). Аналогично, в равнобедренном треугольнике *QAC* биссектриса *AE* – серединный перпендикуляр к отрезку *QC*.

Таким образом точка *I* пересечения биссектрис треугольника *ABC* является и точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника *PQC*, откуда и следует утверждение задачи.

Рис. 1



1.3. Дима пишет подряд натуральные числа 12345678910111213… На каких местах, считая от начала, в первый раз будут стоять подряд три цифры 5?

Ответ: 100, 101 и 102.

Решение. Первый раз три цифры 5 подряд появятся в тот момент, когда Дима запишет числа 55 и 56. Это не случится раньше, так как две цифры 5 из трёх должны принадлежать одному числу. Перед числом 55 стоит 9 однозначных чисел и 54 – 9 = 45 двузначных. Так как 45·2 + 9 = 99, то три подряд цифры 5 будут иметь номера: 100, 101 и 102.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Даны 10 чисел: $a_1 < a_2 < ... < a_{10}$. Сравните среднее арифметическое этих чисел со средним арифметическим первых шести чисел.

Ответ: больше среднее арифметическое десяти чисел.

Решение. Требуется сравнить $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{10}}{10}$ и $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_6}{6}$. Рассмотрим их разность: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{10}}{10}$ – $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_6}{6}$ = $\frac{3(a_1+a_2+\ldots+a_{10})-5(a_1+a_2+\ldots+a_6)}{30}$ = $\frac{(3a_7+3a_8+3a_9+3a_{10})-(2a_1+2a_2+\ldots+2a_6)}{30}$ > 0, так как каждая из скобок содержит 12 слагаемых, причем любое из них в первой скобке больше любого из второй скобки. Следовательно, среднее арифметическое десяти чисел больше.

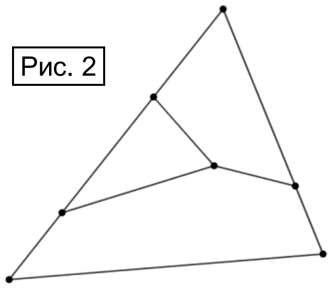
Можно обойтись и без выкладок. Действительно, рассмотрим среднее арифметическое набора из первых шести чисел. Оно меньше, чем a_6. Если к этому *набору добавлять числа, которые больше его среднего арифметического, то среднее арифметическое будет увеличиваться. Значит, среднее арифметическое десяти чисел больше.*

2.2. Можно ли разрезать треугольник на три выпуклых многоугольника с попарно различным количеством сторон?

Ответ: можно.

Решение. См., например, рис. 2. Треугольник разрезан на треугольник, выпуклый четырехугольник и выпуклый пятиугольник.

Рис. 2



2.3. Найдется ли такое десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?

Ответ: найдётся.

Решение. Рассмотрим, например число 1379246850. Если из него вычеркнуть последние шесть цифр, то останется число 1379, которое делится на 7, поэтому является составным. Если же вычеркнуть любые другие шесть цифр, то оставшееся число будет оканчиваться на четную цифру или на 5, то есть также будет составным.

Из приведенного решения следует, что годится любое число, которое начинается с 1379, а остальные цифры стоят в произвольном порядке, кроме цифры 0. Она должна стоять на одном из трех последних мест, иначе, если вычеркнуты все цифры перед нулем, то полученное число не будет четырехзначным.

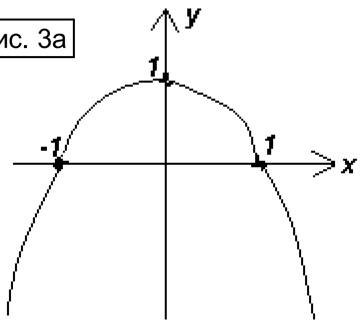
Существует и много других примеров десятизначных чисел, удовлетворяющих условию. В частности, они могут начинаться с тех же четырех цифр, так как 3791, 7931 и 9317 делятся на 7; 1397, 1793, 3179, 3971, 7139 и 9713 делятся на 11; 1937 и 7319 делятся на 13; 7391 делится на 19; 3197 делится на 23; 1739 и 9731 делятся на 37; 7913 делится на 41.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Постройте множество точек на координатной плоскости, удовлетворяющих равенству $\max(x;\, x^2) + \min(y;\, y^2) = 1$.

Ответ: см. рис. 3а.

Рис. 3а



Решение. Заметим, что при $0 < z < 1$ выполняется неравенство $z > z^2$, а при остальных значениях z выполняется неравенство $z^2 \geq z$. Таким образом, требуется рассмотреть 4 случая.

1) $x \leq 0$ или $x \geq 1$, $y \leq 0$ или $y \geq 1$. Тогда равенство примет вид: $x^2 + y = 1$. При $y > 1$ оно выполняться не может, значит, графиком является часть параболы $y = 1 - x^2$, где $y \leq 0$ или $y = 1$ (см. рис. 3б).

2) $x \leq 0$ или $x \geq 1$, $0 < y < 1$. Тогда равенство примет вид: $x^2 + y^2 = 1$. При $x \geq 1$ равенство выполняться не может, значит, график – четверть окружности с выколотыми концами (см. рис. 3в).

3) $0 < x < 1$, $y \leq 0$ или $y \geq 1$. Тогда равенство примет вид: $x + y = 1$. При указанных значениях переменных оно не выполняется.

4) $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Тогда равенство примет вид: $x + y^2 = 1$. Графиком является часть параболы $y^2 = 1 - x$, где $0 < x < 1$ (см. рис. 3г).

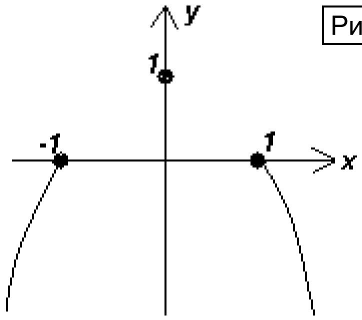
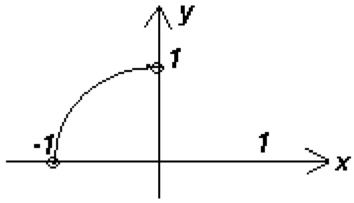


Рис. 3б



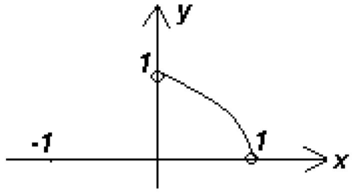


Рис. 3г

Искомое множество точек является объединением этих графиков.

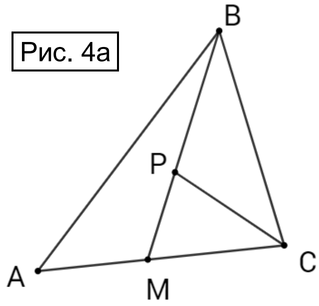
Рис. 3в

3.2. Внутри параллелограмма *ABCD* расположена точка *M*. Сравните периметр параллелограмма и сумму расстояний от *M* до его вершин.

Ответ: периметр параллелограмма больше.

Решение. Первый способ.

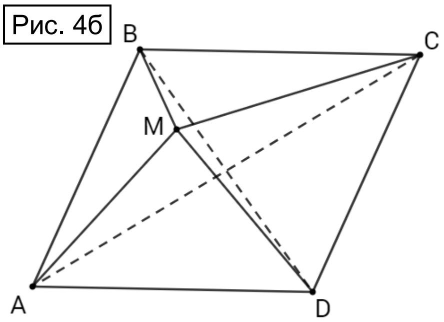
Рис. 4а



Лемма. Пусть точка *P* лежит внутри треугольника *ABC*, либо на его сторонах *AB* или *AC*. Тогда $BP + CP < AB + AC$.

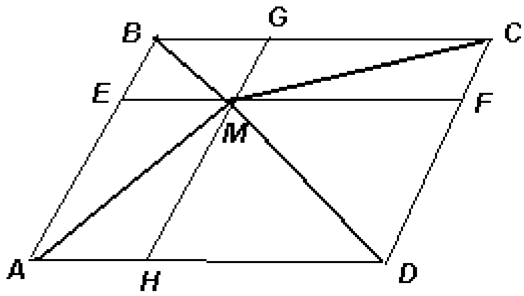
Доказательство. Если точка *P* лежит внутри треугольника *ABC*, то продлим *BP* до пересечения со стороной *AC* в точке *M* (см. рис. 4а).Тогда, воспользовавшись неравенством треугольника для *ABM* и *PMC*, получим: $AB + AC = (AB + AM) + MC > BM + MC = BP + (PM + MC) > BP + CP$.

Рис. 4б



Если же точка *P* лежит на стороне *AC*, то она совпадает с *M*. Тогда второй знак неравенства заменяется на знак равенства, но утверждение остается верным.

Из условия данной задачи следует, что точка *M* принадлежит, по крайней мере, двум из четырех треугольников: *ABC*, *BCD*, *ACD* и *ABD*. Без ограничения общности можно считать, что *M* попала внутрь или на стороны треугольников *ABC* и *ABD* (см. рис. 4б).



Тогда, применив доказанную лемму к этим треугольникам, получим: $AM + CM < AB + BC$ и $BM + DM < AB + AD$. Сложим полученные неравенства: $AM + BM + CM + DM < AB + BC + AB + AD = P_{ABCD}$.

Второй способ. Через точку *M* проведем отрезки *EF* и *GH*, параллельные сторонам параллелограмма (см. рис. 4в). Они разобьют *ABCD* на четыре меньших параллелограмма. Используя неравенство треугольника, получим: $MA < AH + HM$ и $MC < MF + FC$. Тогда, учитывая свойства параллелограмма, $MA + MC < AD + DC$. Аналогично, $MB + MD < AB + BC$.

Рис. 4в

Таким образом, $MA + MB + MC + MD < P_{ABCD}$.

3.3. В театральной труппе 60 актеров. Каждые два хотя бы раз играли в одном и том же спектакле. В каждом спектакле занято не более 30 актеров. Какое наименьшее количество спектаклей мог поставить театр?

Ответ: 6.

Решение. *Пример*. Разобьём труппу на 4 группы по 15 человек и проведем 6 спектаклей, в каждом из которых задействованы какие-то две группы. Количество способов выбрать две группы из четырех равно $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$.

Оценка. Докажем, что пяти спектаклей не хватит. В сумме актеры сыграли не более, чем $30\cdot 5 = 150$ ролей, значит, если спектаклей пять, то найдётся актер, сыгравший не более двух ролей. Тогда он сыграл в одном спектакле не более, чем с $29\cdot 2 = 58$ коллегами из остальных 59. Следовательно, для выполнения условия задачи пяти спектаклей недостаточно.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Положительные числа *x*, *y* и *z* таковы, что $xyz = 1$. Докажите, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y} \le \frac{x\sqrt{x}}{2}+\frac{y\sqrt{y}}{2}+\frac{z\sqrt{z}}{2}$.

Решение. Запишем равносильное неравенство: $\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{x+z}+\frac{2z}{x+y} \le x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}$ и оценим слагаемые в его левой части, учитывая, что все данные числа положительные. Это можно сделать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. Тогда $\frac{y+z}{2} \ge \sqrt{yz} \Leftrightarrow \frac{2}{y+z} \le \frac{1}{\sqrt{yz}} \Leftrightarrow \frac{2x}{y+z} \le \frac{x}{\sqrt{yz}}$.

Аналогично, $\frac{2y}{x+z} \le \frac{y}{\sqrt{xz}}$ и $\frac{2z}{x+y} \le \frac{z}{\sqrt{xy}}$. Тогда, учитывая, что $\sqrt{xyz} = 1$, получим:

$$\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{x+z}+\frac{2z}{x+y} \le \frac{x}{\sqrt{yz}}+\frac{y}{\sqrt{xz}}+\frac{z}{\sqrt{xy}} \le x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}$$

<u>Второй способ</u>. Используем неравенство между средним средним геометрическим и средним гармоническим: $\sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Тогда $\frac{2x}{y+z} = \frac{2}{\frac{y}{x}+\frac{z}{x}} \le \sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{z}} = \sqrt{\frac{x^2}{\frac{1}{x}}} = x\sqrt{x}$, так как $yz = \frac{1}{x}$. Аналогично, $\frac{2y}{x+z} \le y\sqrt{y}$ и $\frac{2z}{x+y} \le z\sqrt{z}$. Складывая три полученных неравенства почленно, получим требуемое неравенство.

4.2. В треугольнике *ABC*: $\angle B = 110°$, $\angle C = 50°$. На стороне *AB* выбрана такая точка *P*, что $\angle PCB = 30°$, а на стороне *AC* – такая точка *Q*, что $\angle ABQ = 40°$. Найдите угол *QPC*.

Ответ: 40°.

Решение. <u>Первый способ</u>. Из условия задачи следует, что $\angle BPC = 40°$, $\angle QBC = 70°$ (см. рис. 5а). Проведем луч, симметричный лучу *CP* относительно прямой *AC*. Пусть *M* – точка пересечения этого луча с лучом *BQ*. Тогда $\angle MCQ = \angle PCQ = 20°$. Так как $\angle PCM = 40° = \angle PBM$, то четырехугольник *PBCM* – вписанный, значит, $\angle MPC = \angle MBC = 70°$. Тогда из треугольника *MPC* получим, что $\angle PMC = 70° = \angle P\tilde{N}M$, то есть этот треугольник равнобедренный. Его биссектриса *CÀ* является

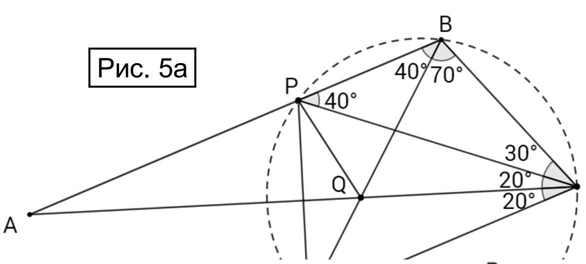


Рис. 5а

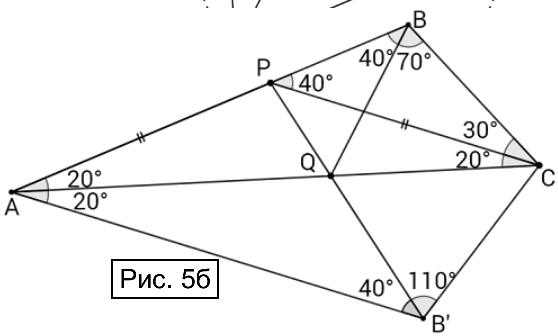


Рис. 5б

серединным перпендикуляром к стороне PM, значит, точки M и P симметричны относительно нее. Следовательно, $\angle QPC = \angle QMC = \angle\hat{A}PC = 40°$.

<u>Второй способ</u>. Отразим точку B относительно прямой AC, тогда $\angle AB'C = \angle ABC = 110°$ (см. рис. 5б). Так как $\angle BAC = 180° - (50° + 110°) = 20° = \angle PCA$, то $PA = PC$. Кроме того, $\angle APC = 140° = 180° - \frac{1}{2}\angle AB'C$. Следовательно, P – центр описанной окружности треугольника $AB'C$. Тогда $PA = PB'$, значит, $\angle PB'A = \angle PAB' = 40°$. Так как $\angle QB'A = \angle QBA = 40°$ (из симметрии), то точки P,Q и B' лежат на одной прямой.

Также из симметрии, $\angle QB'C = \angle QBC = 70°$. Учитывая, что $PC = PB'$, получим: $\angle QPC = 180° - 2\angle PB'C = 40°$.

<u>Третий способ</u>. Пусть O – центр описанной окружности треугольника BCQ. Тогда $\angle QOC = 2\angle QBC = 140°$. Следовательно, $\angle OCQ = \frac{1}{2}(180° - \angle QOC) = 20° = \angle PCQ$, то есть O лежит на луче CP (см. рис. 5в). Кроме того, треугольник BCQ – остроугольный, поэтому точка O лежит внутри него.

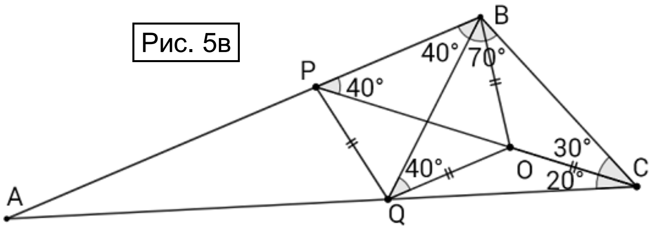


Рис. 5в

Из условия задачи следует, что $\angle BQC = 60°$, значит, $\angle OQB = \angle BQC - \angle OQC = 40° = \angle PBQ$. Следовательно, $AB \parallel QO$. Кроме того, $\angle BĐC = 180° - (\angle ĐBC + \angle ĐCB) = 40° = \angle ĐBQ$, поэтому $PBOQ$ – равнобокая трапеция. Таким образом, $\angle QPC = \angle QBO = \angle BQO = 40°$.

4.3. Пусть N – четное число, которое не кратно 10. Найдите цифру десятков числа N^{20}.

Ответ: 7.

Решение. <u>Первый способ</u>. Заметим, что любое чётное число, не оканчивающееся нулем, при возведении в четвертую степень дает число, оканчивающееся на 6. Так как $N^{20} = (N^4)^5$, то и двадцатая степень такого числа будет оканчиваться на 6.

Так как оба числа N^4 и N^{20} делятся на 4, то по признаку делимости на 4 цифра десятков у этих чисел обязана быть нечётной. Тогда эти числа можно записать так: $N^4 = 20k + 16$; $N^{20} = (N^4)^5 = (20k + 16)^5$, где k – некоторое натуральное число.

Используя бином Ньютона, получим, что первые пять из шести слагаемых в разложении кратны ста, а 16^5 на 100 не делится. Следовательно, последние две цифры у чисел N^{20} и 16^5 совпадают. Так как $16^5 = 2^{20} = 1024^2 = 1048576$, то искомая цифра – это 7.

<u>Второй способ</u>. Вычислим две последние цифры числа N^{20}. Так как N – четное и не кратно 10, то $N = 5k \pm 1$ или $N = 5k \pm 2$, где k – некоторое натуральное число. Используя бином Ньютона, получим, что $(5k \pm 1)^{20} \equiv 1 \pmod{25}$. Аналогично, $(5k \pm 2)^{20} \equiv 2^{20} \pmod{25} \equiv 1024^2 \pmod{25} \equiv (-1)^2 \pmod{25} \equiv 1 \pmod{25}$.

.Следовательно, возможны только четыре варианта двух последних цифр: 01, 26, 51, 76. Но из четности числа N следует также, что N^{20} делится на 4, поэтому возможен только вариант 76, то есть предпоследняя цифра – это 7.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

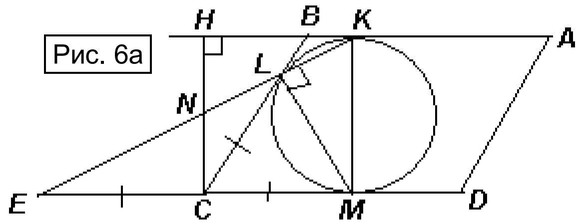
5.1. Решите уравнение: $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + ... + (x + 10)^2 = (x + 1 + 2 + ... + 10)^2$.

Ответ: $\pm\frac{4\sqrt{165}}{3}$.

Решение. Выполним возведение в квадрат и сгруппируем некоторые слагаемые, тогда $10x^2 + 2(1+2+\ldots+10)x + 1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 = x^2 + 2(1+2+\ldots+10)x + (1+2+\ldots+10)^2$

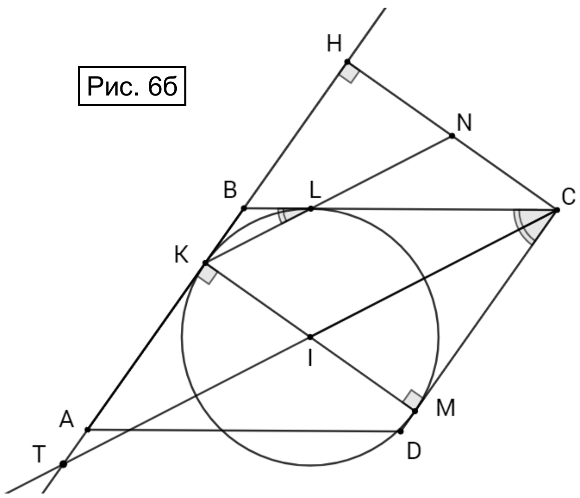
Учитывая, что $1^2 + 2^2 + ... + 10^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$, а $(1 + 2 + ... + 10)^2 = 55^2 = 3025$, после приведения подобных слагаемых, получим: $9x^2 = 2640$, то есть $x = \pm\frac{4\sqrt{165}}{3}$.

5.2. Окружность касается сторон *AB*, *BC* и *CD* параллелограмма *ABCD* в точках *K*, *L* и *M* соответственно. Докажите, что прямая *KL* делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины *C* на *AB*.



Решение. Пусть *CH* – высота параллелограмма, а прямая *KL* пересекает ее в точке *N* (см. рис. 6 а, б).

Первый способ. Продлим *KL* до пересечения с прямой *CD* в точке *E* (см. рис. 6а). Так как *MK* – диаметр окружности, то $\angle KLM = 90°$, тогда треугольник *ELM* – прямоугольный. Учитывая, что *CL* = *CM*, получим, что *LC* – его медиана, проведенная к гипотенузе. Следовательно, *CE* = *CM* = *HK*. Значит, прямоугольные треугольники *CEN* и *HKN* равны (по катету и острому углу), поэтому *CN* = *HN*, что и требовалось.



Второй способ. Пусть *I* – центр окружности, тогда *CI* – биссектриса угла *BCD* (см. рис. 6б). Продлив ее до пересечения с прямой *AB* в точке *T* и воспользовавшись тем, что биссектриса угла параллелограмма отсекает равнобедренный треугольник, получим, что *BT* = *BC*. Кроме того, *BK* = *BL*, значит, *KL* || *CT* (*например, из подобия треугольников BKL и BTC*).

Так как *KM* – диаметр окружности, а *I* – его середина, то равны прямоугольные треугольники *TKI* и *CMI* (по катету и острому углу). Учитывая, что *KHCM* – прямоугольник, получим: *KT* = *MC* = *KH*. Тогда, воспользовавшись теоремой Фалеса для угла *THC*, получим, что прямая *KL* делит высоту *CH* пополам, что и требовалось.

5.3. Семь грибников собрали вместе 100 грибов. Обязательно ли найдутся два грибника, собравшие вместе не менее, чем 36 грибов, если количества грибов, собранных каждым, попарно различаются?

Ответ: не обязательно.

Решение. Пусть, например, грибники собрали 10, 12, 13, 14, 16, 17 и 18 грибов соответственно. Тогда любая пара вместе собрала не более, чем 35 грибов, а 10 + 12 + 13 + 14 + 16 + 17 + 18 = 100.

Математическая регата 9 классов 13.10.2018

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Существуют ли два целых числа, разность квадратов которых равна 2018?

Ответ: нет.

Решение. Пусть существуют такие целые x и y, что $x^2 - y^2 = 2018$, тогда $(x+y)(x-y) = 2018$. Далее можно рассуждать по-разному.

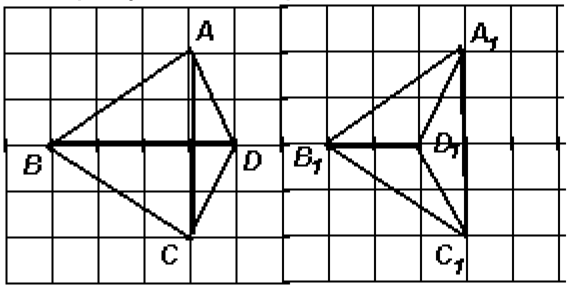
Первый способ. Так как $(x+y)-(x-y)=2y$, то Числа $(x+y)$ и $(x-y)$ одинаковой четности. Нечетными эти числа быть не могут, так как их произведение четное. Следовательно, числа $(x+y)$ и $(x-y)$ – четные, поэтому $x^2 - y^2$ кратно 4, но 2018 не кратно 4. Противоречие.

Второй способ. 2018 = 2·1009 = (–2)(–1009) = 1·2018 = (–1)(–2018) и других разложений этого числа на множители не существует, так как 1009 – простое число. Во всех случаях полученные множители разной четности, а числа $(x+y)$ и $(x-y)$ одинаковой четности. Противоречие.

1.2. Стороны и одна из диагоналей одного четырехугольника соответственно равны сторонам и диагонали другого. Обязательно ли эти четырехугольники равны?

Ответ: не обязательно.

Рис. 1



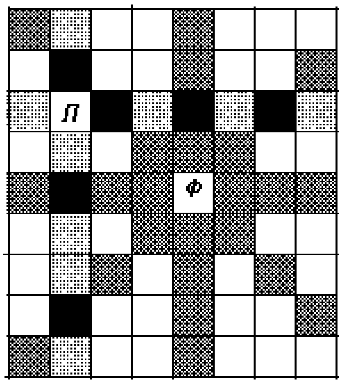
Решение. Достаточно рассмотреть, например, четырехугольник *ABCD* с перпендикулярными диагоналями и отразив вершину *D* относительно прямой *AC*, получить четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 1).

Четырехугольники *ABCD* и $A_1B_1C_1D_1$ удовлетворяют условию, но не равны.

1.3. На бесконечной шахматной доске стоят две фигуры: ладья и ферзь, из которых ни одна не бьет другую. Какое количество клеток может находиться под боем обеих фигур?

Ответ: 6 клеток.

Рис. 2



Решение. Расположим на клетчатой доске ферзя и ладью так, чтобы они не находились на одной горизонтали, вертикали или диагонали, и выделим клетки, которые они бьют. Клетки, которые бьет ладья, назовем «ладейными» (см. рис. 2). Горизонтали и вертикали, которые бьет ферзь, имеют две общие клетки с «ладейными». Кроме того, диагонали, которые бьет ферзь, имеют четыре общие клетки с «ладейными». Итого: шесть общих битых клеток.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Петя отправился пешком из лагеря в поселок. В 12.00, когда Петя был в *а* км от лагеря, его нагнал велосипедист, посадил и подвез, высадив в *а* км от поселка. После этого Петя пришел в поселок в 14.00. Сколько времени потребуется Пете на обратный путь пешком из поселка в лагерь, если известно, что на велосипеде его везли со скоростью вдвое большей, чем он ходит пешком?

Ответ: 4 часа.

Решение. Первый способ («арифметический»). За два часа обратного пути Петя пройдет *а* км и половину того расстояния, на которое его подвезли. Так как подобрали его также в *а* км от лагеря, то осталось ему пройти еще столько же, значит, весь обратный путь займет 4 часа.

Второй способ («алгебраический»). Пусть скорость Пети равна *v* км/ч, тогда скорость его езды на велосипеде равна 2*v* км/ч. Если *x* км Петя проехал на велосипеде, то расстояние от лагеря до поселка равно 2*a* + *x* (км). Составим уравнение: $\frac{a}{v}+\frac{x}{2v}=2 \Leftrightarrow$ $\frac{2a+x}{2v}=2$. Тогда $\frac{x+2a}{v}=4$, что и требуется.

2.2. Касательная к описанной окружности треугольника *ABC*, проведенная в точке *B*, пересекает прямую *AC* в точке *P*. Окружность с центром *P* и радиусом *PB* пересекает сторону *AC* в точке *Q*. Докажите, что *BQ* – биссектриса треугольника *ABC*.

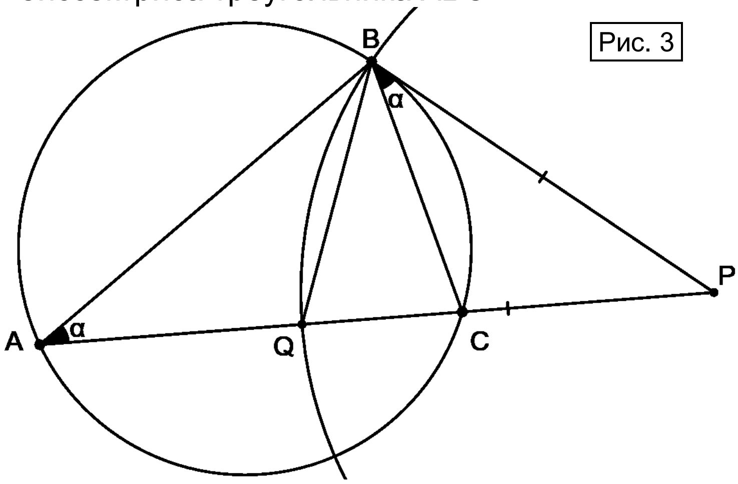


Рис. 3

Решение. Заметим, что ∠*PBC* = ∠*BAC* = α (угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу, см. рис. 3). Кроме того, треугольник *BPQ* – равнобедренный. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Воспользуемся тем, что ∠*PBQ* = ∠*PQB*. Так как *BQC* – внешний угол треугольника *ABQ*, то ∠*ABQ* = ∠*BQC* – α = ∠*PBQ* – α = ∠*CBQ*, что и требовалось.

Второй способ. Треугольники *PAB* и *PBC* подобны (по двум углам), значит, $\frac{PA}{PB}=\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{BC}$. Тогда $PQ^2=PB^2=PA\cdot PC$. Кроме того, $\frac{AQ}{QC}=\frac{PA-PQ}{PQ-PC}$. Так как $\frac{PA}{PB}=\frac{PA-PQ}{PQ-PC} \Leftrightarrow PA\cdot PQ-PA\cdot PC=PA\cdot PQ-PQ^2$ и последнее равенство верное, то $\frac{AQ}{QC}=\frac{PA}{PB}$, то есть *BQ* – биссектриса треугольника *ABC*.

2.3. Найдите все такие натуральные *m* и *n*, что $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{7}$.

Ответ: *m* = *n* = 14; *m* = 56, *n* = 8; *m* = 8, *n* = 56.

Решение. Из условия задачи следует, что *m* > 7 и *n* > 7. Так как переменные входят в уравнение симметрично, то достаточно найти пары (*m*; *n*), в которых *m* ≥ *n*.

Выразив *m* из данного уравнения, получим: $m=\frac{7n}{n-7}$. Тогда $\frac{7n}{n-7}\ge n$, то есть *n* ≤ 14. Таким образом, достаточно проверить *n* = 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14. Перебором получим, что *m* принимает натуральные значения в двух случаях: при *n* = 8 *m* = 56; при *n* = 14 *m* = 14.

При записи ответа учитываем симметричную пару.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Найдите наибольшее значение суммы $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}$, если $a+b+c=6$.

Ответ: 3.

Решение. Заданная сумма имеет смысл, если $a\ge1$, $b\ge1$ и $c\ge1$. Пусть $x=\sqrt{a-1}$, $y=\sqrt{b-1}$, $z=\sqrt{c-1}$. Тогда $x^2+y^2+z^2=3$. Найдем наибольшее значение суммы $x+y+z$, учитывая, что каждое слагаемое принимает неотрицательные значения. Для этого оценим эту сумму «сверху».

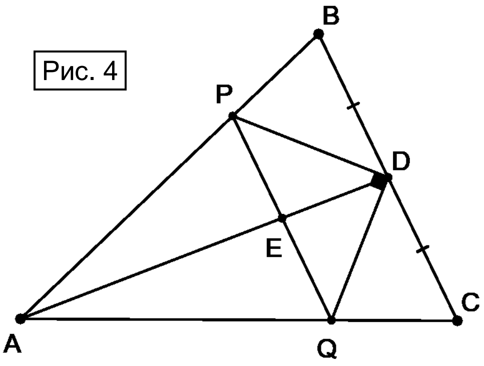
Первый способ. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним квадратичным: $\frac{x+y+z}{3}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}=1$, откуда $x+y+z\le3$.

Второй способ. Пусть $x+y+z=d$. Тогда, используя неравенство $m^2 + n^2 \geq 2mn$, получим: $d^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\leq 3x^2+3y^2+3z^2=9$, откуда $d\leq 3$.

Значение 3 достигается, при $x=y=z=1$, что соответствует $a=b=c=2$.

3.2. В треугольнике *ABC* проведена медиана *AD*, *DP* и *DQ* – биссектрисы треугольников *ABD* и *ACD* соответственно, *E* – точка пересечения *AD* и *PQ*. Найдите *PQ*, если *DE* = 2.

Ответ: *PQ* = 4.



Решение. Воспользовавшись свойством биссектрисы треугольника, получим: $\frac{AP}{PB}=\frac{AD}{BD}$ и $\frac{AQ}{QC}=\frac{AD}{CD}$ (см. рис. 4). Так как *BD* = *CD*, то $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$, значит, *PQ* || *BC*. Тогда *E* – середина отрезка *PQ* (*следует из рассмотрения двух пар подобных треугольников или из гомотетии с центром A*)..

Угол *PDQ* между биссектрисами смежных углов равен 90°, поэтому *DE* – медиана прямоугольного треугольника *PDQ*, проведенная к его гипотенузе. Следовательно, *PQ* = 2*DE* = 4.

3.3. Таблицу размером 3×3 надо заполнить числами –1, 0 и 1 так, чтобы суммы чисел в строках были одинаковыми. Сколькими способами это можно сделать? (*Способы считаются различными, если различаются полученные таблицы. Все числа использовать не обязательно.*)

Ответ: 831 способ.

Решение. 1) Сумму 3 можно получить единственным способом: 3 = 1 + 1 + 1, значит, и всю таблицу с такой суммой в каждой строке можно получить единственным способом. Аналогично и для суммы –3 = (–1) + (–1) + (–1).

2) Сумму 2 можно получить тремя способами: 2 = 1 + 1 + 0 = 1 + 0 + 1 = 0 + 1 + 1. Значит, всю таблицу можно заполнить 3^3 = 27 способами. Для суммы –2 ситуация аналогична.

3) Сумму 1 можно получить шестью способами: 1 = 1 + 0 + 0 = 0 + 1 + 0 = 0 + 0 + 1 = –1 + 1 + 1 = 1 + (–1) + 1 = 1 + 1 + (–1). Следовательно, таблицу можно заполнить 6^3 = 216 способами. Для суммы –1 ситуация аналогична.

4) Сумму 0 можно получить семью способами: 0 = 0 + 0 + 0, а также шесть перестановок чисел –1, 0 и 1. Тем самым, всю таблицу можно заполнить 7^3 = 343 способами

Итого: 1 + 27 + 216 + 343 + 216 + 27 + 1 = 831 способ.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Решите уравнение: $x\sqrt{1-x^2}+x=\sqrt{1+x^2}$

Ответ: $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Решение. Выражения, входящие в уравнение, имеют смысл, если $|x|\leq 1$. Кроме того, если $-1 \leq x \leq 0$, то левая часть принимает неположительные значения, а правая – положительные. Таким образом, $0 < x \leq 1$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ («алгебраический»). Так как при указанных значениях *x* обе части уравнения принимают только положительные значения, то при возведении обеих частей в квадрат получим равносильное уравнение: $x^2-x^4+2x^2\sqrt{1-x^2}+x^2=1+x^2 \Leftrightarrow x^2-x^4+2x^2\sqrt{1-x^2}=1 \Leftrightarrow x^4-2x^2\sqrt{1-x^2}+1-x^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^4+x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Полученное число лежит в указанном промежутке, так как 2 < $\sqrt{5}$ < 3 $\Leftrightarrow$ 0,5 < $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ < 1 .$\Leftrightarrow$ $\sqrt{0{,}5}$ < $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ < 1.

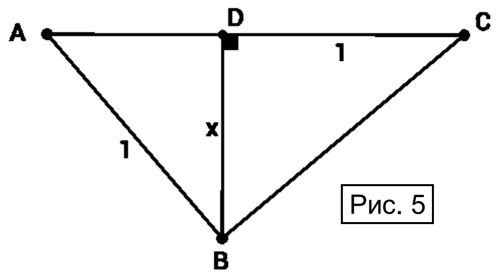


Рис. 5

<u>Второй способ</u> («геометрический»).

Рассмотрим треугольник ABC, в котором AB = 1, BD – высота, лежащая внутри треугольника, CD = 1, $BD = x$ (см. рис.). Тогда AD = $\sqrt{1-x^2}$, BC = $\sqrt{1+x^2}$

Заметим, что левая часть уравнения – это $2S_{ADB}$ + $2S_{CDB}$ = $2S_{ABC}$. С другой стороны, $2S_{ABC}$ = $AB{\cdot}BC{\cdot}\sin\angle ABC$ = $\sqrt{1+x^2}$ $\cdot\sin\angle ABC$. Значит, $\sin\angle ABC = 1$, то есть $\angle ABC = 90°$.

Тогда $BD^2 = AD{\cdot}CD$, то есть $x^2 = \sqrt{1-x^2}$. Дальнейшие выкладки совпадают с приведенными выше.

4.2. Три стороны и диагонали одного четырехугольника соответственно равны трем сторонам и диагоналям другого. Обязательно ли эти четырехугольники равны?

Ответ: не обязательно.

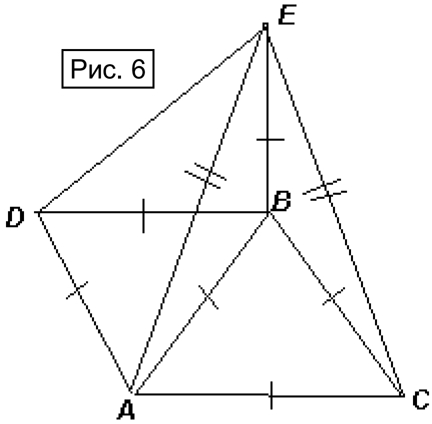


Рис. 6

Рассмотрим равносторонние треугольники ABC и ABD с общей стороной AB. На стороне BD получившегося ромба вне его построим равнобедренный прямоугольный треугольник DBE с гипотенузой DE (см. рис. 6). Проведем также отрезки AE, CE и DE.

Для четырехугольников $DABE$ и $ACBE$ выполняется условие задачи: стороны DA è AB первого соответственно равны сторонам AC и CB второго, а сторона BE – общая. Кроме того, $DB = AB$ и $AE = CE$ (в силу симметрии).

Но эти четырехугольники не равны, так как $DE \neq AE$ (например, потому, что $\angle ADE = 105° > \angle DAE$).

4.3. В шахматном турнире по круговой системе (каждый играет с каждым ровно один раз, победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0) каждый из шахматистов, избежавших трех последних мест, половину своих очков набрал во встречах с тремя участниками, занявшими последние три места. Найдите наибольшее возможное количество участников турнира.

Ответ: 10 шахматистов.

Решение. Пусть в турнире участвовало n шахматистов, тогда во встречах между шахматистами, избежавшими трех последних мест, разыграно $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ очков, а в их встречах с тремя «аутсайдерами» – $3(n-3)$ очка. Так как «аутсайдеры» могли отобрать какие-то очки у остальных, то $\frac{(n-3)(n-4)}{2} \leq 3(n-3)$, откуда $n \leq 10$.

Приведем пример для n = 10. Каждый из «аутсайдеров» во встречах между собой один раз выиграл и один раз проиграл, а всем остальным шахматистам они проиграли. Все партии между остальными семью участниками завершились вничью. Тогда каждый из «аутсайдеров» набрал 1 очко, а каждый из остальных – 6 очков, из которых 3 очка набрал во встречах с «аутсайдерами».

Существуют и другие примеры. Отметим, что если получить ответ перебором и построить пример, то оценку несложно провести прямым вычислением.

Действительно, пусть в турнире участвовало 11 человек, тогда в нем разыграно $\frac{11\cdot 10}{2}$ *= 55 очков, из которых 3 очка разыграли между собой «аутсайдеры»,* а $Q = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ *разыграли между собой остальные. Значит, во встречах «аутсайдеров» с остальными разыграно P = 55 – 3 –28 = 24 очка. Но для того, чтобы выполнялось условие задачи, должно выполняться неравенство P ≥ Q. Противоречие. Понятно, что при дальнейшем увеличении n «разрыв» между Q и P будет только увеличиваться.*

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Составьте уравнение какого-нибудь приведённого квадратного трёхчлена $y = x^2 + px + q$, график которого пересекает оси координат в вершинах треугольника площади 15.

Ответ: например, $y = x^2 – x – 6$.

Решение. Пусть *A* и *B* – точки пересечения графика искомой функции с осью *OX*, *C* – точка его пересечения с осью *OY* (см. рис. 7). В приведенном примере: *A*(–2; 0), *B*(3; 0), *C*(0; –6). Следовательно, S_{ABC} = 0,5*AB*·*CO* = 0,5·5·6 = 15, что и требовалось.

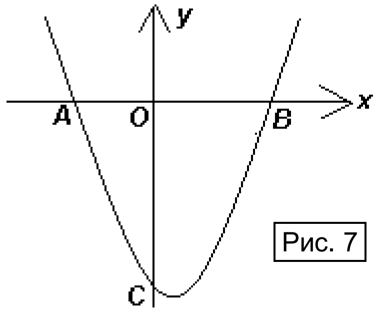


Рис. 7

Найти этот пример, а также другие возможные примеры можно, исходя из следующих рассуждений.

Так как в общем случае A(x_1; 0), B(x_2; 0), C(0; q), то $S_{ABC} = \frac{|x_2 - x_1| \cdot |q|}{2}$ *(см. рис. 7). Воспользуемся тем, что* $|x_2 - x_1| = \sqrt{D}$. *Действительно,* $(x_2 - x_1)^2 = x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q$. *Тогда, по условию задачи, получим:* $\sqrt{p^2 - 4q} \cdot |q| = 30$. *Любая пара (p; q), удовлетворяющая этому равенству, является решением. В частности, можно указать другие возможные ответы с целыми значениями p и q:* $y = x^2 + x - 6$; $y = x^2 \pm 4x - 5$, *а также трехчлен, график которого симметричен относительно оси OY:* $y = x^2 - \sqrt[3]{225}$.

5.2. Биссектриса угла *A* треугольника *ABC* пересекает его описанную окружность в точке *D*. Серединные перпендикуляры к сторонам *AB* и *AC* пересекают *AD* в точках *M* и *N* соответственно. Докажите, что *AM* = *DN*.

Решение. Пусть серединные перпендикуляры к сторонам *AB* и *AC* пересекаются в точке *O* – центре окружности, описанной около треугольника *ABC* (см. рис. 8). Проведем перпендикуляр *OK* к хорде *AD*, тогда *K* – середина *AD*. Докажем, что *K* – середина отрезка *MN*.

Действительно, ∠*ONM* = ∠*ANP* = 90° – ∠*PAN* = 90° – ∠*QAM* = ∠*OMN*, то есть треугольник *MON* – равнобедренный. Следовательно его высота *OK* является и его медианой.

Таким образом, отрезки *AM* и *DN* симметричны относительно точки *K*, значит, *AM* = *DN*.

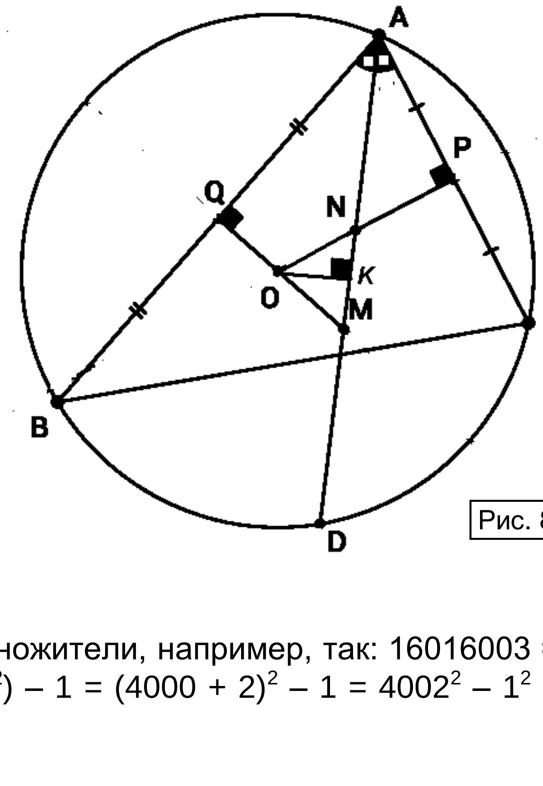


Рис. 8

5.3. Является ли простым число 16016003?

Ответ: не является.

Решение. Данное число можно разложить на множители, например, так: 16016003 = (16000000 + 16000 + 4) – 1 = $(4000^2 + 2 \cdot 4000 \cdot 2 + 2^2) - 1 = (4000 + 2)^2 - 1 = 4002^2 - 1^2 = 4001 \cdot 4003$.

Отметим, что числа 4001 и 4003 являются простыми числами – «близнецами». Математикам до сих пор неизвестно, является ли множество пар простых чисел – «близнецов» конечным или бесконечным.

Математическая регата 9 классов 19.10.2019

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. На доске записано верное равенство вида $a^b = c$, где a, b и c – различные натуральные числа, при этом в обеих частях равенства использован один и тот же набор цифр. Один из возможных примеров такого равенства: $5^2 = 25$. Укажите ещё два примера (одну и ту же цифру можно использовать несколько раз).

Ответ: например, $11^2 = 121$ или $11^3 = 1331$ или $50^2 = 2500$ или $100^{10} = \underbrace{100\ldots0}_{20\,нулей}$.

Существует и много других примеров.

1.2. Можно ли на квадратном листе со стороной 1 разместить несколько непересекающихся кругов, сумма радиусов которых равна 2019?

Ответ: можно.

Решение. Разобьем, например, стороны данного квадрата на 10^4 равных отрезков и через их концы проведём прямые, параллельные сторонам квадрата. Тогда данный квадрат разобьётся на 10^8 квадратов со стороной 10^{-4}. В каждый такой квадрат поместим круг радиусом $\frac{2019}{10^8}$, центр которого совпадает с центром квадрата. Сумма радиусов этих кругов равна 2019. Так как $2\cdot\frac{2019}{10^8} < \frac{10^4}{10^8} = 10^{-4}$, то диаметр каждого круга меньше стороны квадрата, в котором он лежит, поэтому указанные круги не пересекаются.

1.3. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен половине большего из них. Обязательно ли он равен меньшему из этих чисел?

Ответ: обязательно.

Решение. По условию: НОД($2a$; b) = a и $2a > b$. Тогда b кратно a, то есть $b = ka$, где k – натуральное число. Следовательно, $a \le ka < 2a$, поэтому $k = 1$. Таким образом, $b = a$.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Из пунктов А и В одновременно начали движение навстречу друг другу пешеход и велосипедист. Через час пешеход оказался ровно посередине между пунктом А и велосипедистом. Ещё через 15 минут они встретились и продолжили свой путь. Сколько времени затратил пешеход на путь из А в В?

Рис. 1

Ответ: 5 часов.

Решение. Пусть v км/ч – скорость велосипедиста, а p км/ч – скорость пешехода. Так как пешеход оказался ровно посередине между пунктом А и велосипедистом через час, то расстояние от А до В равно $2p + v$ (км) (см. рис. 1). Находясь на расстоянии p км друг от друга, они встретились через 15 минут, значит, $\frac{p}{p+v} = \frac{1}{4}$. Из этого равенства получим, что $v = 3p$.

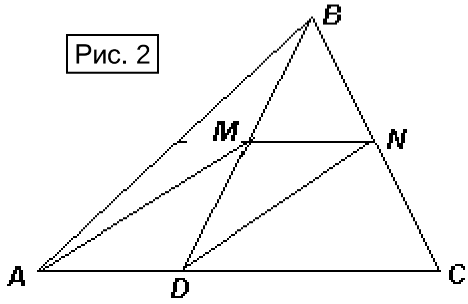
Тогда искомое время равно $\frac{2p+v}{p} = 2 + \frac{v}{p}$ = 5 (ч).

2.2. В треугольнике *ABC* на стороне *AC* отмечена такая точка *D*, что медиана *AM* треугольника *ABD* параллельна медиане *DN* треугольника *BCD*. Найдите *AD* : *DC*.

Ответ: $AD : DC = 1 : 2$.

Решение. Так как M – середина BD, N – середина BC, то MN – средняя линия треугольника CBD (см. рис. 2). Значит, $MN \parallel CD$ и $MN = 0,5CD$. Кроме того, $MN \parallel AD$ и $AM \parallel DN$, поэтому $AMND$ – параллелограмм. Тогда $MN = AD$. Следовательно, $AD : DC = MN : 2MN = 1 : 2$.

Рис. 2



2.3. В одном барабане было 8 шаров, из которых 3 красных, а в другом барабане – 7 шаров, из которых 4 красных. С равной вероятностью выбирают один из барабанов и вынимают из него один шар. Какова вероятность того, что этот шар будет красным?

Ответ: $\frac{53}{112}$.

Решение. Вероятность выбрать один из барабанов равна $\frac{1}{2}$, поэтому вероятность достать красный шар из первого барабана равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{16}$, а из второго – $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} = \frac{2}{7}$. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{3}{16} + \frac{2}{7} = \frac{53}{112}$.

Решением является интуитивное применение формулы полной вероятности для события A – вытащить красный шар из какого-либо барабана. $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$, где H_1 и H_2 – события, состоящие в том, что мы берем шар из первого или второго барабана соответственно. $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$, $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$ – условные вероятности вытащить красный шар, если шар вынимается из первого или второго барабана соответственно.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Докажите, что при $a > 1$ выполняется неравенство: $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} < \frac{1}{\sqrt{a-1}}$.

Решение. <u>Первый способ</u>. Так как все части доказываемого неравенства принимают только положительные значения, то оно равносильно неравенству $\sqrt{a-1} < \frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}} < \sqrt{a}$.

Преобразуем среднюю часть: $\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}} = \frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)} = \frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{2}$. Теперь докажем два неравенства по отдельности.

1) $\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{2} > \sqrt{a-1} \Leftrightarrow \sqrt{a+1} > \sqrt{a-1}$, а это верное неравенство.

2) По неравенству между средним арифметическим и средним квадратичным для двух различных положительных чисел, получим: $\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{2} < \sqrt{\frac{a+1+a-1}{2}} = \sqrt{a}$.

<u>Второй способ</u>. Сразу докажем два неравенства по отдельности.

1) $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 2a - 2\sqrt{a^2-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-1} < 2a - \frac{1}{a} \Leftrightarrow 4a^2 - 4 < 4a^2 - 4 + \frac{1}{a^2}$ $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a^2}$, а это верно.

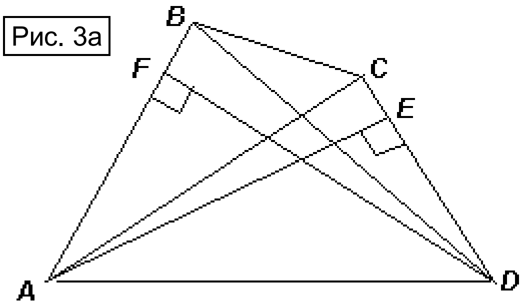
2) $\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}<\dfrac{1}{\sqrt{a-1}} \Leftrightarrow \sqrt{a+1}<\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-1} \Leftrightarrow a+1<\dfrac{1}{a-1}+2+a-1 \Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{a-1}$, что выполняется при $a > 1$.

3.2. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* на стороны *CD* и *AB* опущены перпендикуляры *AE* и *DF* соответственно. Найдите углы четырёхугольника, если $AE \ge BD$, $DF \ge AC$, $AD = 2AB$.

Ответ: два угла по 60° и два угла по 120°.

Решение. Так как перпендикуляр к прямой короче наклонной, проведённой к ней из той же точки, то $AC \ge AE \ge BD$ и $BD \ge DF \ge AC$ (см. рис. 3а). Следовательно, $AC = BD$. Тогда *AE* совпадает с *AC*, а *DF* совпадает с *DB*.

Рис. 3а



Так как $\angle ABD = \angle ACD = 90°$, то четырёхугольник *ABCD* можно вписать в окружность с диаметром *AD* (см. рис. 3б).

Кроме того, прямоугольные треугольники *ABD* и *DCA* равны (по катету и гипотенузе), значит, $\angle ADB = \angle CAD$, поэтому $BC \parallel AD$, то есть *ABCD* – равнобедренная трапеция.

В прямоугольном треугольнике *ABD* катет *AB* равен половине гипотенузы *AD*, значит, $\angle ADB = 30°$, тогда $\angle BAD = 60° = \angle CDA$, $\angle ABC = \angle DCB =.120°$.

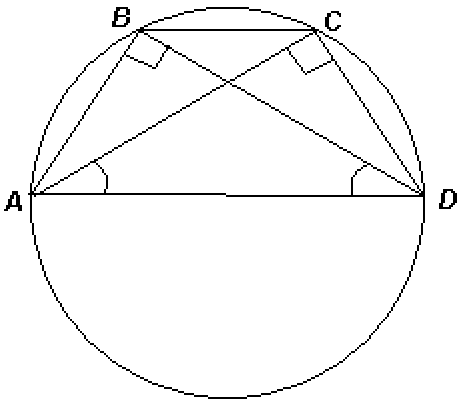


Рис. 3б

3.3. Семь целых чисел записаны по кругу. Сколько из них кратны трём, если известно, что сумма любых двух, стоящих подряд, не делится на 3 и сумма любых трёх, стоящих подряд, не делится на 3?

Ответ: 3.

Решение. Оценка. Если чисел, кратных трём, не меньше четырёх, то какие-то два из них будут стоять рядом, что противоречит условию. Значит, чисел, делящихся на три, не больше трёх.

Докажем, что среди любых трёх чисел, стоящих подряд, есть число, делящееся на 3. Действительно, рассмотрим какие-нибудь три числа, стоящие подряд. Пусть среди них нет кратных трём. Тогда, либо какие-то два из них имеют разные остатки при делении на 3 и их сумма кратна трём, либо все три имеют одинаковые остатки при делении на 3 и их сумма также кратна трём. Противоречие.

Следовательно, чисел, кратных трём, не может быть меньше трёх, иначе найдется тройка подряд идущих чисел не кратных трём. Таким образом, их ровно три.

Пример: 0 1 1 0 1 0 1.

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3y, \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$.

Ответ: (2; 1), (–2; –1).

Решение. Перепишем систему в виде: $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3y-x, \\ \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=y \end{cases}$ и разделим первое уравнение на второе. Получим: $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{x+3y}=\dfrac{3y-x}{y}, \\ \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=y \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (3x-y)y=(3y-x)(x+3y), \\ \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=y \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 3xy-y^2=3xy+9y^2-x^2-3xy, \\ \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=y \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2+3xy-10y^2=0, \\ \dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=y \end{cases}$. Решим первое уравнение относительно *x*: $D=49y^2$; $x=\dfrac{-3y\pm 7y}{2}$; $x=2y$ или $x=-5y$.

1) $\begin{cases} x=2y, \\ \dfrac{5y}{5y^2}=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y, \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y, \\ y=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2, \\ y=-1 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} x=-5y, \\ \dfrac{-2y}{26y^2}=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5y, \\ \dfrac{-1}{13y^2}=1 \end{cases}$. Решений нет.

Так как при делении уравнений была получена система, которая является следствием исходной, то необходимо сделать проверку. Подставив каждую из найденных пар в исходную систему, убеждаемся, что обе действительно являются её решениями.

4.2. В остроугольном треугольнике *ABC* отмечены точки *K* и *L* на стороне *AB*, *M* – на стороне *BC* и *N* – на стороне *AC* так, что *KLMN* – прямоугольник. Докажите, что середина его диагонали *KM* лежит на отрезке с концами в серединах стороны *AB* и высоты *CH*.

Решение. Предварительно докажем полезную лемму.

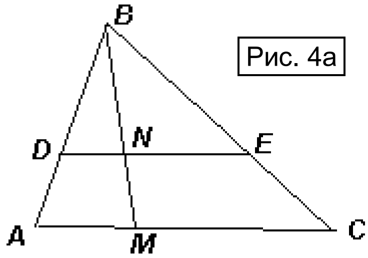


Рис. 4а

Лемма. Пусть в треугольнике *ABC* проведен отрезок *DE*, параллельный *AC* (см. рис. 4а). Луч с началом в вершине *B* пересекает *AC* и *DE* в точках *M* и *N* соответственно. Тогда $\dfrac{DN}{NE}=\dfrac{AM}{MC}$.

Доказательство. Рассмотрим гомотетию с центром *B*, при которой образом точки *A* является точка *D*. Так как *DE* || *AC*. то образом прямой *AC* является прямая *DE*. Значит, при этой гомотетии, точки *C* и *M* переходят в точки *E* и *N* соответственно. Тогда коэффициент гомотетии равен $\dfrac{DN}{AM}=\dfrac{NE}{MC}$, что равносильно утверждению леммы.

Вместо гомотетии можно рассмотреть две пары подобных треугольников: DBN и ABM; NBE и MBC. Из этих подобий следует цепочка равенств: $\dfrac{DN}{AM}=\dfrac{BN}{BM}=\dfrac{NE}{MC}$. *Тогда* $\dfrac{DN}{NE}=\dfrac{AM}{MC}$, *что и требовалось.*

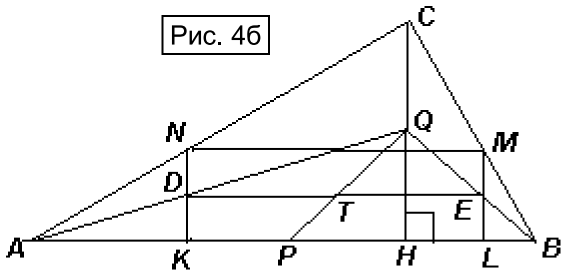


Рис. 4б

Перейдем к решению предложенной задачи. Пусть *P* – середина *AB*, *Q* – середина *CH*, прямые *QA* и *QB* пересекают стороны *KN* и *ML* данного прямоугольника в точках *D* и *E* соответственно (см. рис. 4б).

Так как *KN* || *CH*, то по доказанной лемме *D* – середина *KN*. Аналогично, *E* – середина *ML*. Следовательно, прямая *DE* является осью симметрии прямоугольника. Так как *DE* || *AB* и *P* – середина *AB*, то точка *T* пересечения

PQ и DE является серединой отрезка DE (по лемме). Значит, T – точка пересечения диагоналей прямоугольника, делящая диагонали пополам.

Отметим, что продолжив эти рассуждения, можно доказать более общий факт: внутренние точки отрезка PQ являются геометрическим местом центров всех прямоугольников, построенных так, как указано в условии задачи.

4.3. Есть 30 гирь с массами 1 г, 2 г, ..., 30 г. Убрали 10 гирь, суммарная масса которых составляет треть от суммарной массы всех. Можно ли оставшиеся гири разбить на две части с равным количеством гирь и с равными массами, независимо от того, какие именно гири были убраны?

Ответ: можно.

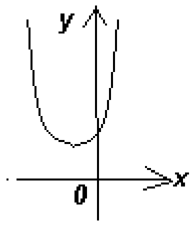
Решение. Суммарная масса всех гирь: $\frac{1+30}{2}\cdot 30$ = 465 (г). После того, как убрали 10 гирь, осталось 20 гирь, суммарная масса которых 310 г. Разобьём все изначально имевшиеся гири на пары с суммарной массой 31 г: (1; 30), (2; 29), ... , (15; 16). Таких пар 15, значит, после удаление десяти гирь, хотя бы 5 пар гирь останутся. Из этих десяти гирь с суммарной массой 31·5 = 155 (г) будет состоять одна часть. Тогда суммарная масса остальных десяти будет равна 310 – 155 = 155 (г) и они составят вторую часть. Таким образом, условие задачи будет выполнено.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Определите знаки коэффициентов a и c квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ и схематически изобразите его график, если известно, что $a + b + c > 0$ и $0 < b < 2\sqrt{ac}$. Обоснуйте ответ.

Ответ: $a > 0$, $c > 0$; график – см. рис. 5.

Рис. 5



Решение. Так как $0 < b < 2\sqrt{ac}$., то $b^2 < 4ac$. Следовательно, $D = b^2. – 4ac < 0$. Значит, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, то есть график (парабола) не пересекает ось абсцисс.

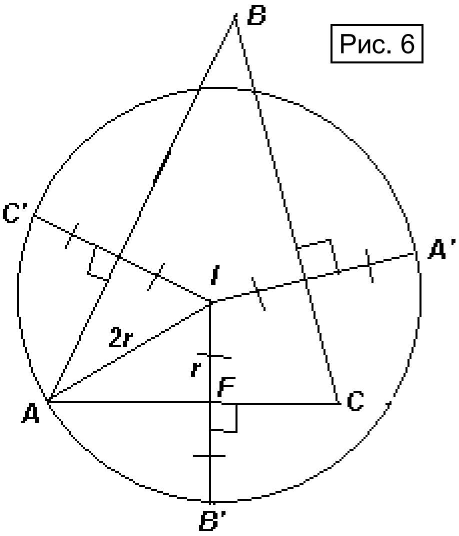
Так как $a + b + c = y(1) > 0$, то график целиком лежит в верхней полуплоскости. Тогда «ветви» параболы направлены вверх. Следовательно, $a > 0$. Тогда $c =. y(0) > 0$.

Абсцисса вершины параболы: $x_в = -\frac{b}{2a}$ < 0, поэтому вершина параболы лежит левее оси ординат.

5.2. Точки A', B' и C' симметричны центру I вписанной окружности треугольника ABC относительно его сторон. Окружность, описанная около треугольника $A'B'C'$, проходит через вершину A. Найдите угол BAC.

Ответ: 60°.

Рис. 6



Решение. Из условия задачи следует, что расстояние от I до сторон треугольника равно радиусу r вписанной окружности треугольника ABC. Тогда $A'I = B'I = C'I = 2r$, то есть точка I является центром описанной окружности треугольника $A'B'C'$ (см. рис. 6). Так как эта окружность проходит через точку A, то $IA = 2r$.

Пусть AC и IB' пересекаются в точке F, тогда в прямоугольном треугольнике AIF катет IF в два раза меньше гипотенузы IA, значит, $\angle IAF = 30°$. Следовательно, $\angle BAC = 2\angle IAF = 60°$.

5.3. На собрание прибыло 201 человек из пяти стран. Среди каждых шести из них найдутся двое одинакового возраста. Докажите, что из некоторой страны на собрание приехало не менее пяти человек одного пола и одного возраста.

Решение. По принципу Дирихле из какой-то страны приехало не менее 41 человека. Из них не менее, чем 21 человек одного пола. Если среди них есть люди шести разных возрастов, то условие задачи не выполняется, значит возрастов не более пяти.

Если среди 21 человека одного пола не более пяти возрастов, то, опять же, по принципу Дирихле, среди них найдутся 5 человек одного возраста.