Математическая регата
15.10.2022
9 класс

Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Найдите наименьшее целое решение неравенства: $(x + 1)^3 + (x – 1)^3 \geq 29$.

Ответ: 3.

Решение. Пусть $f(x) = (x + 1)^3 + (x – 1)^3$. Заметим, что $f(x)$ – возрастающая функция. Так как $f(2) = 28 < 29$, $f(3) = 72 > 29$, то $x = 3$ является наименьшим целым решением данного неравенства.

Можно и не ссылаться на возрастание функции. Тогда надо дополнительно указать, что $f(0) = 0 < 29$, $f(1) = 8 < 29$, а если $x < 0$, то $f(x) < 0$, так как $(x + 1)^3 + (x – 1)^3 = 2x^3 + 6x = 2x(x^2 + 3)$.

1.2. Существует ли четырёхугольник, отличный от прямоугольника, у которого есть три равных угла?

Ответ: существует.

Решение. Приведём два примера таких четырёхугольников.

1) Выпуклый. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABQ, в котором $\angle A = \angle B = 75°$ (см. рис. 1а). На стороне AQ отметим произвольную точку D и построим угол ADC, равный 135°. Тогда $\angle BCD = 75°$, то есть четырёхугольник $ABCD$ искомый.

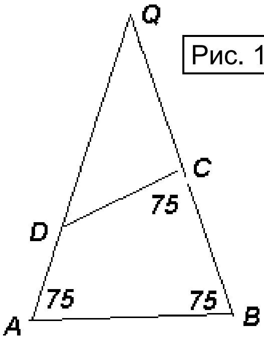


Рис. 1а

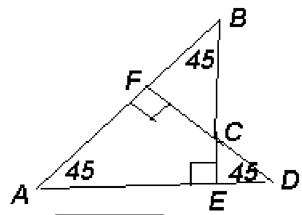


Рис. 1б

2) Невыпуклый. Рассмотрим два прямоугольных равнобедренных треугольника ABE и ADF (не обязательно равных). Наложим их друг на друга так, как показано на рис. 1б. Пусть BE и DF пересекаются в точке C, тогда четырёхугольник $ABCD$ искомый.

Существуют и другие примеры.

1.3. Найдите хотя бы одну четвёрку натуральных чисел, для которых верно равенство $2019m + 2020n = 2021p + 2022q$.

Ответ: например, $m = 2021$, $n = 2022$, $p = 2019$, $q = 2020$.

Ввиду взаимной простоты как чисел 2019 и 2020, так и чисел 2021 и 2022, левая и правая часть этого равенства могут принимать любое целочисленное значение при бесконечном количестве целочисленных пар (m; n) и (p; q).

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Существует ли такое натуральное значение N, что число $N\cdot 2018\cdot 2020\cdot 2022 + 4$ является точным квадратом?

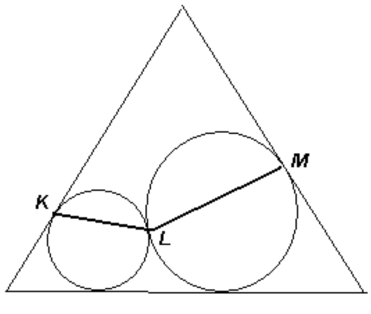
Ответ: существует.

Решение. Первый способ. Пусть, например, $N = 2020$. Тогда исходное выражение примет вид: $N(N - \mathbf{2})N(N + \mathbf{2}) + 4 = N^2(N^2 - \mathbf{4}) + 4 = N^4 - \mathbf{4}N^2 + 4 = (N^2 - \mathbf{2})^2 = (2020^2 – 2)^2$.

Второй способ. Пусть $P = 2018\cdot 2020\cdot 2022$, тогда возьмём $N = P + 4$. Исходное выражение примет вид: $NP + 4 = (P + 4)P + 4 = (P + 2)^2$.

2.2. В равносторонний треугольник вписаны две касающиеся окружности (см. рисунок). Найдите угол KLM, где K, L и M – точки касания.

Ответ: 150°.



Решение. Пусть ABC – данный треугольник. Проведём общую касательную LH данных окружностей (см. рис. 2а). Далее можно рассуждать по-разному.

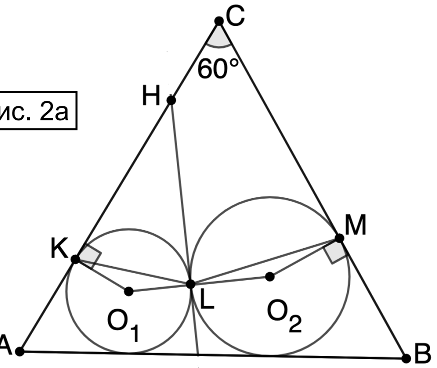


Рис. 2а

<u>Первый способ</u>. Заметим, что $\angle KLH = \angle LKH$ и $\angle MLH = \angle LMC$. Тогда, используя сумму углов четырёхугольника $CKLM$, получим, что $\angle KLM = \angle KLH + \angle MLH = (360° - \angle C) : 2 = 150°$.

<u>Второй способ</u>. Пусть O_1 и O_2 – центры данных окружностей, тогда точка L лежит на отрезке O_1O_2. Проведём радиусы O_1K и O_2M. Из пятиугольника CKO_1O_2M находим, что сумма его углов O_1 и O_2 равна $540° - (60° + 90° + 90°) = 300°$.

По теореме об угле между касательной и хордой получим: $\angle KLM = \angle KLH + \angle MLH = 0{,}5\angle KO_1L + 0{,}5\angle MO_2L = 0{,}5(\angle KO_1L + \angle MO_2L) = 150°$.

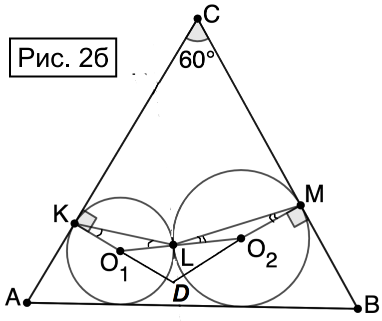


Рис. 2б

Можно обойтись и без построения общей касательной. Достаточно продолжить радиусы O_1K и O_2L до пересечения в точке D (см. рис. 2б). Тогда из четырёхугольника $CKDM$ находим, что $\angle KDL = 360° - (60° + 90° + 90°) = 120°$. Значит, сумма углов O_1 и O_2 треугольника O_1O_2D равна $60°$. Эти углы являются внешними при вершинах равнобедренных треугольников KO_1L и MO_2L соответственно, поэтому $\angle O_1LK + \angle O_2LM = 30°$, откуда и следует, что $\angle KLM = 150°$.

2.3. Женя и Сеня разделили с остатком одно и то же натуральное число на 12 и 13 соответственно. Сумма неполного частного, полученного Женей, и остатка, полученного Сеней, равна 14. Найдите остаток, полученный Женей.

Ответ: 1.

Решение. Пусть n – натуральное число, которое делили Женя и Сеня, d и r – неполное частное и остаток соответственно, полученные Женей, p и q – неполное частное и остаток соответственно, полученные Сеней. Тогда $n = 12d + r = 13p + q$ (*).
По условию $d + q = 14$, то есть $q = 14 - d$. Подставив это в равенство (*), после преобразования получим: $13(d - p) = 14 - r$. Левая часть равенства кратна 13, поэтому и правая часть кратна 13. Учитывая, что $0 \le r \le 11$, получим: $r = 1$.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Пушкин и Гоголь прогуливались по бульвару. Они начинали прогулку одновременно с противоположных концов бульвара и впервые встретились в 50 метрах от его середины. Дойдя до конца бульвара каждый немедленно разворачивался и шёл обратно с той же скоростью. Они встретились лицом к лицу еще дважды, после чего Пушкин догнал Гоголя в конце бульвара. Найдите длину бульвара.

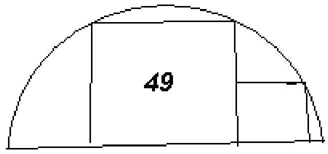
Ответ: 700 метров.

Решение. Из условия о том, когда Пушкин догнал Гоголя, следует, что за одно и то же время Пушкин прошёл длину бульвара 4 раза, а Гоголь – 3 раза. Значит, отношение их скоростей равно 4 : 3. Но тогда и расстояния, пройденные ими к моменту первой встречи, относятся так же, то есть $\frac{0,5x+50}{0,5x-50}=\frac{4}{3}$, где x метров – длина бульвара. Решая пропорцию, находим: $x = 700$.

Такое же уравнение можно получить более стандартными рассуждениями, введя сначала несколько переменных. Пусть s метров – длина бульвара, x м/мин и y м/мин – скорости писателей (x > y), а до первой встречи они шли t минут. Тогда условие о первой встрече записывается в виде двух уравнений: xt = 0,5s + 50, yt = 0,5s – 50.

Условие о том, когда Пушкин догнал Гоголя, означает, что к этому моменту Гоголь прошёл весь бульвар трижды, а Пушкин – четырежды. Момент времени один и тот же, поэтому $\frac{3s}{y} = \frac{4s}{x}$. *Выразим дважды одну и ту же величину* $\frac{x}{y}$. *Разделив первое уравнение на второе и сократив на t, запишем:* $\frac{x}{y} = \frac{0,5s + 50}{0,5s - 50}$. *Третье уравнение преобразуем к виду* $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$. *Приравнивая правые части получившихся уравнений, получим:* $\frac{0,5s + 50}{0,5s - 50} = \frac{4}{3}$.

3.2. В полукруг вписан квадрат площади 49, к которому примыкает еще один квадрат, одна из вершин которого лежит на полуокружности (см. рисунок). Найдите площадь второго квадрата.



Ответ: 12,25.

Решение. Обозначим вершины квадратов так, как показано на рис. 3 а, б. Из условия следует, что сторона большего квадрата равна 7. В силу симметрии, центр *O* данного полукруга – середина стороны *AD*. Далее можно рассуждать по-разному.

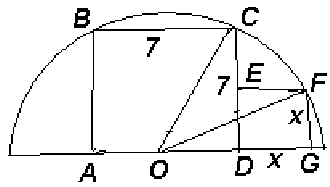
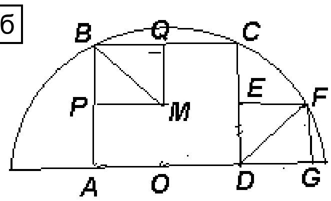


Рис. 3а

Первый способ. Проведём радиусы *OC* и *OF* (см. рис. 3а). Из прямоугольного треугольника *OCD*: $OC^2 = 7^2 + 3,5^2$, а из прямоугольного треугольника *OFG*: $OF^2 = (3,5 + x)^2 + x^2$. Учитывая, что *OF* = *OC*, получим: $3,5^2 + 7x + 2x^2 = 7^2 + 3,5^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 49 = 0 \Leftrightarrow x = 3,5$ или $x = -7$.

Отрицательное значение решением задачи не является, значит, искомая площадь равна $3,5^2 = 12,25$.

Рис. 3б



Можно обойтись и без уравнения. Достаточно посмотреть на те же самые треугольники OCD и FOG и понять, что если x < 3,5, то оба катета первого треугольника больше соответствующих катетов второго, а если x > 3,5, то наоборот. Поэтому в обоих случаях их гипотенузы не могут быть равны. Значит, x = 3,5.

Второй способ. Пусть *M* – центр квадрата *ABCD*, *P* и *Q* – середины *AB* и *BC* (см. рис. 3б). Рассмотрим поворот с центром *O* на 90° по часовой стрелке. При этом повороте угол *PMQ* и его биссектриса, на которой лежит точка *B*, перейдут в угол *EDG* и его биссектрису, на которой лежит точка *F*. Но так как окружность при указанном повороте переходит в себя, то точка *B* переходит в точку *F*. Таким образом, квадрат *PBQM* переходит в квадрат *DEFG*. Следовательно, площадь *DEFG* в четыре раза меньше площади *ABCD*, то есть она равна 12,25.

3.3. Пираты сели в кружок делить добычу. У каждого из них есть несколько сапфиров и несколько изумрудов. Оказалось, что никакие два пирата, которые сидят не рядом, не могут поделить между собой имеющиеся сапфиры и изумруды так, чтобы и сапфиров, и изумрудов у них стало поровну. Каково наибольшее количество этих пиратов?

Ответ: 8.

Решение. Оценка. Если два пирата не могут поделить сапфиры или изумруды, то количества сапфиров у них имеют разную четность или количества изумрудов у них имеют разную четность (возможно, и то, и другое). С точки зрения чётности чисел, существует четыре вида пар: (ч, ч), (ч, н), (н, ч), (н, н). Два пирата, у которых количества камней выражены парой одного вида, могут сидеть только рядом, иначе найдутся два пирата, не сидящих рядом, у которых чётности количества и сапфиров, и изумрудов совпадают, и тогда они смогут разделить добычу. Значит, каждой такой пары не может быть более двух в кругу. Следовательно, пиратов не более восьми.

Пример. (1, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 2).

Четвёртый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Найдите положительные решения уравнения $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}}}=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: (0,5; 1).

Решение. Из условия следует, что $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}}=\dfrac{3}{2}$. Используем, что при $y > 0$ $y+\dfrac{1}{y}\ge 2$, причём равенство достигается при $y = 1$. Тогда $\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}\le\dfrac{1}{2}$, значит, $x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}\le x+\dfrac{1}{2}$, поэтому $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}}\ge x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}}$. Таким образом, $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}}\le\dfrac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2+0{,}5x+1}{x+0{,}5}\le\dfrac{3}{2}$. Учитывая, что $x > 0$, получим: $2x^2 + x + 2 \le 3x + 1{,}5 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 0{,}5 \le 0 \Leftrightarrow$ $2(x - 0{,}5)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$. При этом исходное равенство достигается только при $y = 1$.

4.2. В окружности с центром O проведена хорда AB, на которой отмечена точка C. Через точку C проведена прямая, перпендикулярная OC. Касательные к окружности в точках A и B пересекают эту прямую в точках P и Q. Докажите, что C – середина отрезка PQ.

Решение. Проведём отрезки OP и OQ и радиусы OA и OB, перпендикулярные соответствующим касательным (см. рис. 4 а, б). Далее можно рассуждать по-разному.

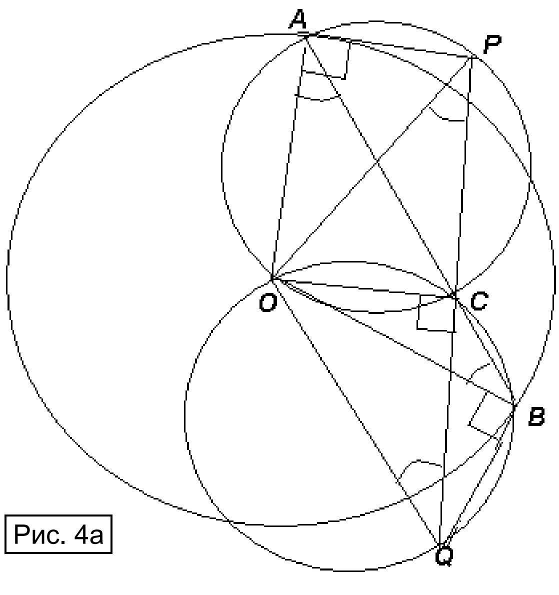


Рис. 4а

Первый способ. Так как углы OAP и OCP прямые, то точки O, A, P и C лежат на одной окружности (см. рис. 4а). Тогда $\angle OAC = \angle OPC$. Кроме того, $\angle OCQ = \angle OBQ = 90°$, значит, на одной окружности лежат точки O, Q, B и C, поэтому $\angle OBC = \angle OQC$. Но $\angle OAC = \angle OBC$ (так как $OA = OB$), следовательно, $\angle OPC = \angle OQC$. Таким образом, треугольник POQ равнобедренный, поэтому его высота OC является и его медианой, то есть C – середина отрезка PQ.

Второй способ. Пусть касательные,

проведённые в точках A и B, пересекаются в точке F (см. рис. 4б). Заметим, что перпендикуляры, опущенные из точки O на прямые, содержащие стороны треугольника PQF, лежат на одной прямой, тогда по утверждению, обратному к теореме о прямой Симсона, точка O лежит на описанной окружности треугольника PQF.

Так как исходная окружность ω вписана в угол AFB, то FO – биссектриса этого угла. Тогда из равенства углов OFQ и OFP, вписанных в полученную окружность, следует равенство хорд OP и OQ. Следовательно, треугольник OPQ – равнобедренный, поэтому его высота OC является и его медианой, то есть $CP = CQ$, что и требовалось доказать.

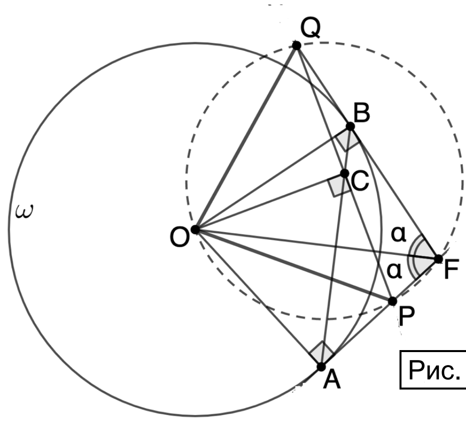


Рис. 4б

О прямой Симсона: см., например, Я.П. Понарин, Элементарная геометрия, т. 1. – М.: МЦНМО, 2004.

4.3. На числовой прямой отмечены все целые числа. Два числа x и y соединяются дугой, если $|x - y|$ является простым числом. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все числа, чтобы любые два числа, соединённые дугой, были покрашены в разные цвета?

Ответ: в 4 цвета.

Решение. Оценка. Меньшим количеством не обойтись, так как числа 0, 2, 5 и 7 попарно соединены дугами, поэтому должны быть покрашены в разные цвета. Таким образом, нужно по крайней мере 4 цвета.

Пример. Покрасим числа вида $4n + k$, где $k\in\{0; 1; 2; 3\}$, в цвет с номером k. Тогда модуль разности между любыми двумя числами одного цвета делится на 4, то есть не является простым числом, поэтому дугой такие числа не соединены.

Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. На прямой AB отмечено 7 точек, лежащих вне отрезка AB. Может ли сумма расстояний от них до A быть равна сумме расстояний от них до B?

Ответ: нет.

Решение. Пусть длина отрезка AB равна m. Рассмотрим разность расстояний от любой из данных точек до A и B. Она равна $\pm m$ (в зависимости от того, с какой стороны от отрезка AB находится эта точка). Сложив эти разности для всех данных точек, получим число, заведомо отличное от нуля, так как количество слагаемых нечётно. Следовательно, указанные в условии суммы не могут оказаться равными.

Это решение можно изложить более формально. Введём на данной прямой координаты. Пусть $A(a)$, $B(b)$, а c_i $(1 \le i \le 7)$ – координаты данных точек. Требуемое в условии равенство сумм можно записать так: $\sum_{i=1}^{7}|c_i - a| = \sum_{i=1}^{7}|c_i - b| \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{7}(|c_i - a| - |c_i - b|) = 0$.

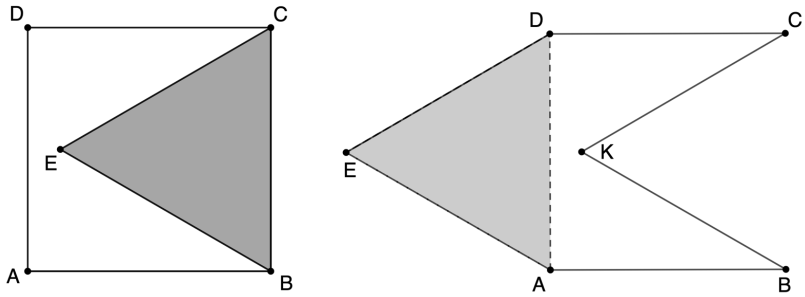
Без ограничения общности можно считать, что $a < b$. Тогда, если точка лежит правее B, то оба модуля раскрываются со знаком «+», а если она лежит левее A, то со знаком «–», поэтому в левой части полученного равенства останется сумма семи слагаемых вида $\pm(b - a)$, которая при любой комбинации знаков «+» и «–» не может равняться нулю, так как количество слагаемых нечётно.

5.2. Можно ли разрезать квадрат на две части и сложить из них равносторонний шестиугольник?

Ответ: можно.

Решение. Вырежем из квадрата *ABCD* равносторонний треугольник *BCE* (см. рис. 5 слева) и пристроим его к стороне *AB* (см. рис. 5 справа). Тогда шестиугольник *ABKCDE* – равносторонний.

Рис. 5



5.3. Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, 3, ..., 25 таким образом, чтобы сумма любых двух соседних чисел равнялась квадрату натурального числа?

Ответ: нельзя.

Решение. Заметим, что у числа 18 может быть только одно соседнее число в соответствии с условием: 7, так как 18 + 7 = 25. Действительно, следующий квадрат числа – это 36 = 18 + 18, но повторять слагаемые нельзя, а точные квадраты, большие 36, получить невозможно, так как уже 49 = 18 + 31, но числа 31 у нас нет, как нет и чисел, больших 31.

Следовательно, указанная расстановка невозможна.

Решения подготовили А. Банникова, И. Барышев, А. Блинков, А. Грибалко, А. Иванищук, Н. Наконечный, М. Серенко, П. Чулков, И. Эльман.